KHAT THÁC BÀI TOÁN HAI TAM GIÁC CÓ CÙNG TRỌNG TÂM

1. Đặt vấn đề: Bài tập 26 - Hình học lớp 10 nâng cao (Nhà Xuất bản Giáo dục 2006 - trang 24) cho kết quả: Nếu G và G' lần lượt là trọng tâm tam giác ABC và tam giác A'B'C' thì $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = 3\overrightarrow{GG'}$. Từ đó suy ra điều kiện cần và đủ để hai tam giác ABC và A'B'C' có cùng trọng tâm là $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = \vec{0}$.

Ta quan tâm đến vấn đề tìm những tam giác có cùng trọng tâm với tam giác ABC cho trước nhờ vào kết quả nói trên.

2. Một số hướng khai thác và kết quả:

2.1. Cho tam giác ABC. Với các điểm M, N, P lần lượt thuộc các đường thẳng BC, CA, AB sao cho $\overrightarrow{BM} = x\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CN} = y\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{AP} = z\overrightarrow{AB}$ thì hai tam giác ABC và MNP có cùng trọng tâm khi và chỉ khi x = y = z.

Thật vậy, ΔABC và ΔMNP có cùng trọng tâm $\Leftrightarrow \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CN} + \overrightarrow{AP} = \vec{0}$

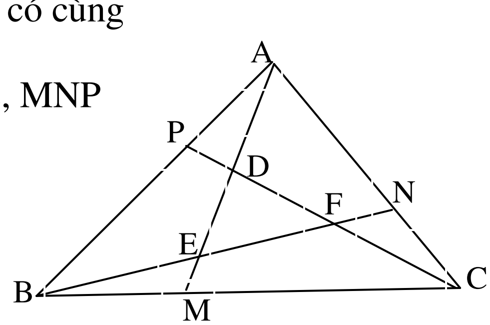
$$\Leftrightarrow x\overrightarrow{BC} + y\overrightarrow{CA} + z\overrightarrow{AB} = \vec{0} \Leftrightarrow (x - z)\overrightarrow{BC} + (y - z)\overrightarrow{CA} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow x - z = y - z = 0 \Leftrightarrow x = y = z.$$

Như thế, với mỗi số thực $k \neq 0$, $k \neq 1$ sao cho $\overrightarrow{BM} = k\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CN} = k\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{AP} = k\overrightarrow{AB}$ ta có một tam giác MNP khác tam giác ABC có cùng trọng tâm với tam giác ABC.

2.2. Cho tam giác ABC. Với các điểm M, N, P lần lượt thuộc các đường thẳng BC, CA, AB sao cho $\overrightarrow{BM} = k\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CN} = k\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{AP} = k\overrightarrow{AB}$, $k \neq 0$, $k \neq 1$, $k \neq \frac{1}{2}$. Gọi D = AM $\cap$ CP, E = AM $\cap$ BN, F = BN $\cap$ CP.

Khi đó ba tam giác ABC, MNP và DEF có cùng trọng tâm.



Thật vậy, theo 2.1 thì hai tam giác ABC, MNP có cùng trọng tâm.

Mặt khác, giả sử $\overrightarrow{PD} = x\overrightarrow{PC}$ ($x \neq 1$)

$\Leftrightarrow -\overrightarrow{DP} = x(\overrightarrow{DC} - \overrightarrow{DP}) \Leftrightarrow (x - 1)\overrightarrow{DP} = x\overrightarrow{DC}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{DP} = \dfrac{x}{x - 1}\overrightarrow{DC}$.

Suy ra $$\overrightarrow{AD} = \frac{\overrightarrow{AP} - \frac{x}{x-1}\overrightarrow{AC}}{1 - \frac{x}{x-1}} = (1 - x)\overrightarrow{AP} + x\overrightarrow{AC} = k(1 - x)\overrightarrow{AB} + x\overrightarrow{AC} \qquad (1)$$

Ta lại có $$\overrightarrow{AD} = y\overrightarrow{AM} = y\,\frac{\overrightarrow{AB} - \frac{k}{k-1}\overrightarrow{AC}}{1 - \frac{k}{k-1}} = (1 - k)y\overrightarrow{AB} + ky\overrightarrow{AC} \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra: $\begin{cases}(1 - k)y = k(1- x)\\ x = yk\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{k}{k^2 - k + 1}\\ x = \dfrac{k^2}{k^2 - k + 1}\end{cases}$

$\Rightarrow \ \overrightarrow{AD} = \dfrac{k}{k^2 - k + 1}\overrightarrow{AM}$

Tương tự $\overrightarrow{BE} = \dfrac{k}{k^2 - k + 1}\overrightarrow{BN}$, $\overrightarrow{CF} = \dfrac{k}{k^2 - k + 1}\overrightarrow{CP}$

$\Rightarrow \ \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = \dfrac{k}{k^2 - k + 1}(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CP}) = \vec{0}$

$\Rightarrow$ Hai tam giác ABC và DEF có cùng trọng tâm.

Như thế, với mỗi số thực $k \neq 0$, $k \neq 1$, $k \neq \frac{1}{2}$ sao cho $\overrightarrow{BM} = k\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CN} = k\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{AP} = k\overrightarrow{AB}$ và D = AM $\cap$ CP, E = AM $\cap$ BN, F = BN $\cap$ CP ta được một tam giác DEF khác tam giác ABC có cùng trọng tâm với tam giác ABC.

2.3. Cho tam giác ABC. Với các điểm I, J, K lần lượt là trung điểm các cạnh BC, CA, AB. Gọi A_1 là điểm đối xứng của A qua I, B_1 là điểm đối xứng của B qua J, C_1 là điểm đối xứng của C qua K. M là một điểm tuỳ ý khác A, B, C. Khi đó các tam giác MAA_1, MBB_1, MCC_1 có cùng trọng tâm với tam giác ABC.

Thật vậy, ta chứng minh được rằng các đoạn thẳng AA_1, BB_1, CC_1 đồng quy tại trung điểm mỗi đoạn, gọi điểm này là O, trọng tâm tam giác ABC là G khi đó $\overrightarrow{MO} = \frac{3}{2}\overrightarrow{MG}$ *(Xin xem Ví dụ 1.11. trang 12, Toán nâng cao Hình học, Nhà xuất bản Giáo dục 1999, Nguyễn Minh Hà (Chủ biên) - Nguyễn Xuân Bình)*

Như thế, với mỗi điểm M khác A, B, C và theo cách đó ta được ba tam giác MAA_1, MBB_1, MCC_1 khác tam giác ABC có cùng trọng tâm với tam giác ABC.

2.4. Cho tam giác ABC. Về phía ngoài tam giác ABC dựng các tam giác đồng dạng với nhau ABD, BCE, CAF. Gọi các hình chiếu của E, F, D lần lượt trên BC, CA, AB là M, N, P. Khi đó các tam giác DEF và MNP có cùng trọng tâm với tam giác ABC.

Thật vậy, gọi các hình chiếu của E, F, D lần lượt trên BC, CA, AB là M, N, P. Đặt $\widehat{DAB} = \widehat{EBC} = \widehat{FCA} = \alpha$, DA/AB = BE/BC = CF/CA = k.

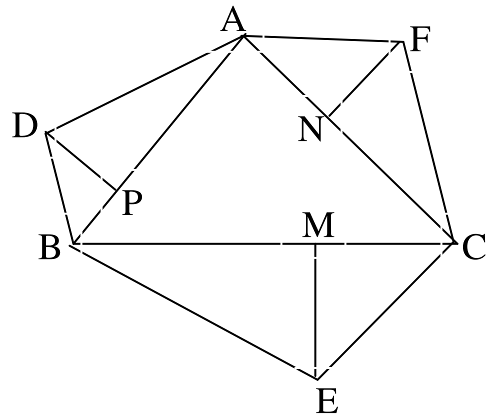
Khi đó: AP = ADcosα = kAB cosα

$\Rightarrow \ \overrightarrow{AP} = k\cos\alpha\overrightarrow{AB}$.

Tương tự $\overrightarrow{BM} = k\cos\alpha\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CN} = k\cos\alpha\overrightarrow{CA}$

$\Rightarrow \ \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CN} = \vec{0}$ (3)

Suy ra tam giác MNP có cùng
trọng tâm với tam giác ABC.



Gọi $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ là các véc tơ đơn vị lần lượt cùng hướng với các véc tơ $\overrightarrow{ME}, \overrightarrow{NF}, \overrightarrow{PD}$.

Đặt ME/MB = NF/NC = PD/PA = m

Ta có $\overrightarrow{ME} = ME\vec{i} = mMB\,\vec{i} = mkBC\cos\alpha\,\vec{i}$

Tương tự $\overrightarrow{NF} = NF\vec{i} = mNC\,\vec{i} = mkCA\cos\alpha\,\vec{j}$

$\overrightarrow{PD} = PD\vec{i} = mPD\,\vec{i} = mkAB\cos\alpha\,\vec{k}$

Suy ra $\overrightarrow{ME} + \overrightarrow{NF} + \overrightarrow{PD} = mk\cos\alpha(BC\,\vec{i} + CA\,\vec{j} + AB\,\vec{k})$.

Mặt khác $BC\,\vec{i} + CA\,\vec{j} + AB\,\vec{k} = \vec{0}$ *(Xin xem Ví dụ 1.23. trang 22, Toán nâng cao Hình học, Nhà xuất bản Giáo dục 1999, Nguyễn Minh Hà (Chủ biên) - Nguyễn Xuân Bình)* Do vậy $\overrightarrow{ME} + \overrightarrow{NF} + \overrightarrow{PD} = \vec{0}$ (4). Từ (3) và (4) suy ra đpcm.

Có thể sử dụng tính chất của phép quay véc tơ để chứng minh gọn hơn.

Thêm nữa, nếu trên các cạnh BC, CA, AB lấy các điểm M_1, N_1, D_1 sao cho BM_1= BE, CN_1= CF, AD_1 = AD thì tam giác $M_1N_1D_1$ cũng có cùng trọng tâm với tam giác ABC.

Như thế, với mỗi cách dựng ba tam giác đồng dạng theo cách đó ta được ba tam giác MNP, DEF, $M_1N_1D_1$ khác tam giác ABC có cùng trọng tâm với tam giác ABC.

2.5. *Từ các đỉnh của hai tam giác ABC và DEF có cùng trọng tâm G ta thiết lập được 6 bộ ba tam giác khác mà các trọng tâm của ba tam giác trong cùng một bộ tạo thành một tam giác cũng có trọng tâm G.*

Ví dụ, một bộ ba tam giác: ADE có trọng tâm G_1, BEF có trọng tâm G_2, CFD có trọng tâm G_3. Khi đó $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GD} + \overrightarrow{GE} = 3\overrightarrow{GG_1}$, $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GE} + \overrightarrow{GF} = 3\overrightarrow{GG_2}$, $\overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GF} + \overrightarrow{GD} = 3\overrightarrow{GG_3}$. Để ý rằng $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GE} + \overrightarrow{GF} = \vec{0}$, suy ra: $\overrightarrow{GG_1} + \overrightarrow{GG_2} + \overrightarrow{GG_3} = \vec{0}$ (đpcm) hay tam giác $G_1G_2G_3$ có trọng tâm G.

Sáu bộ ba các tam giác nói trên đó là:

Các bộ ba tam giác	**Trọng tâm**	**Các tam giác có cùng trọng tâm G**
ADE	G_1	
BEF	G_2	$G_1G_2G_3$
CFD	G_3	
AEF	G_4	
BFD	G_5	$G_4G_5G_6$
CDE	G_6	
AFD	G_7	
BDE	G_8	$G_7G_8G_9$
CEF	G_9	

DAB	G_{10}	
EBC	G_{11}	$G_{10}G_{11}G_{12}$
FCA	G_{12}	
DBC	G_{13}	
ECA	G_{14}	$G_{13}G_{14}G_{15}$
FAB	G_{15}	
DCA	G_{16}	
EAB	G_{17}	$G_{16}G_{17}G_{18}$
FBC	G_{18}	

2.6. *Từ các đỉnh ba tam giác ABC, DEF, MNP có cùng trọng tâm G ta thiết lập được 234 bộ ba các tam giác khác mà ba trọng tâm của ba tam giác trong cùng một bộ tạo thành một tam giác có cùng trọng tâm G.*

Cách 1: Từ các tam giác ABC, DEF, MNP có cùng trọng tâm G ta thiết lập được 3 cặp tam giác có cùng trọng tâm G mà từ mỗi cặp theo trên ta thiết lập được 6 bộ ba các tam giác khác mà ba trọng tâm của ba tam giác trong cùng một bộ tạo thành một tam giác có cùng trọng tâm G. Theo đó ta có 18 bộ ba các tam giác mà ba trọng tâm của ba tam giác trong cùng một bộ tạo thành một tam giác có cùng trọng tâm G.

Cách 2: Từ các tam giác ABC, DEF, MNP có cùng trọng tâm G **x**ét bảng mà mỗi ô trong một hàng là một hoán vị của 3 đỉnh của một tam giác trong ba tam giác đó.

	A	A	B	B	C	C
Hàng 1	B	C	C	A	A	B
	C	B	A	C	B	A
	D	D	E	E	F	F
Hàng 2	E	F	F	D	D	E
	F	E	D	F	E	D
	M	M	N	N	P	P
Hàng 3	N	P	P	M	M	N
	P	N	M	P	N	M

Thiết lập một bộ ba tam giác bằng cách lấy 3 ô bất kỳ thuộc ba hàng khác nhau trong bảng trên, ví dụ:

Hàng 1	**Hàng 2**	**Hàng 3**	**Các tam giác**	**Trọng tâm**	**Tam giác có trọng tâm G**
A	D	N	ADN	G_1	
B	F	P	BFP	G_2	$G_1G_2G_3$
C	E	M	CEM	G_3	

Theo đó, với ba tam giác có cùng trọng tâm G ta thiết lập được 216 bộ ba tam giác khác mà ba trọng tâm của ba tam giác trong cùng một bộ tạo thành một tam giác có cùng trọng tâm G.

Với hai cách trên từ ba tam giác có cùng trọng tâm G ta thiết lập được 234 bộ ba tam giác khác mà ba trọng tâm của ba tam giác trong cùng một bộ tạo thành một tam giác có cùng trọng tâm G.

Ta có thể tiếp tục quá trình cho 4 tam giác, 5 tam giác... có cùng trọng tâm.

Cuối cùng với các cách khai thác trên ta có thể mở rộng từ các tam giác đến các hệ điểm có cùng trọng tâm để được các kết quả thú vị.