MỘT SỐ CÁCH DỰNG TIẾP TUYẾN CỦA CÔNIC

Ở THCS ta đã giải các bài toán dựng tiếp tuyến của một đường tròn khi biết tiếp điểm hoặc biết một điểm ở ngoài đường tròn thuộc tiếp tuyến với bộ dụng cụ dựng hình gồm compa và thước thẳng. Một cách tự nhiên, ta nghĩ đến các bài toán tương tự đối với cônic. Trong bài viết này xin được đề cập chủ yếu đến hai bài toán dựng tiếp tuyến của cônic: *Thứ nhất, dựng tiếp tuyến của một cônic biết tiếp điểm M_0. Thứ hai, dựng tiếp tuyến của một cônic biết tiếp tuyến đi qua điểm M không thuộc cônic. Trong cả hai bài toán trên đều giả thiết cônic đã cho gắn cùng với các tiêu điểm của nó.*

1. Cônic là một elip.

Trước hết, xin nhắc lại một số kết quả gắn liền với elip mà ta có thể vận dụng.

Kết quả 1. Cho elip (E) với các tiêu điểm F_1, F_2. Tiếp tuyến của (E) tại M_o là phân giác ngoài của góc $\widehat{F_1M_0F_2}$.

Kết quả 2. Cho elip (E) với các tiêu điểm F_1, F_2. Một họ đường thẳng có phương k (hệ số góc k) cắt (E) theo các dây. Khi đó tập hợp các trung điểm của các dây thuộc một đường thẳng đi qua tâm của (E) và có phương k' sao cho:

$$k.k' = -\frac{b^2}{a^2}$$

Tập hợp các trung điểm nói trên được gọi là đường kính liên hợp với phương k. Ta cũng biết rằng, đường kính liên hợp với phương k có phương k' khi và chỉ khi đường kính liên hợp với phươg k' có phương k.

Kết quả 3. Cho elip (E) tâm O có độ dài trục lớn 2a. Đường tròn (O; a) gọi là vòng chính của (E). Với điểm M thuộc vòng chính của (E) thì đường thẳng Δ vuông góc MF tại M (trong đó F là một trong hai tiêu điểm của (E)) là một tiếp tuyến của (E).

Thật vậy, với elip $(E): \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \ (a > b > 0)$ thì vòng chính là đường tròn

$$(C): x^2 + y^2 = a^2$$

$M_0(x_0; y_0)$ thuộc (C) $\Leftrightarrow x_0^2 + y_0^2 = a^2$

Giả sử F(c; 0) thì $\overrightarrow{M_0F} = (c - x_0; -y_0)$. Suy ra phương trình của Δ:

$$(c - x_0)(x - x_0) - y_0(y - y_0) = 0$$

$$\Leftrightarrow (c - x_0)x - y_0y + a^2 - cx_0 = 0$$

Ta có: $a^2(c - x_0)^2 + b^2y_0^2 = a^2(c - x_0)^2 + (a^2 - c^2)y_0^2 =$

$a^2c^2 - 2a^2cx_0 + a^2x_0^2 + a^2y_0^2 - c^2y_0^2 = a^2c^2 - 2a^2cx_0 + a^2(x_0^2 + y_0^2) - c^2(a^2 - x_0^2) =$

$= a^4 - 2a^2cx_0 + c^2x_0^2 = (a^2 - cx_0)^2$. Suy ra Δ là tiếp tuyến của (E).

Kết quả 4. Cho elip (E) tâm O có độ dài trục lớn 2a. Đường tròn (O; $\sqrt{a^2+b^2}$) gọi là vòng Monge của (E). Với điểm M thuộc vòng Monge của (E) kẻ được hai tiếp tuyến của (E) và hai tiếp tuyến này vuông góc với nhau tại M.

Kết quả 5. Cho elip (E) với các tiêu điểm F_1, F_2. Các đường tròn (F_1; 2a) và (F_2; 2a) gọi là đường tròn chuẩn của (E). Với điểm M thuộc (E), đường thẳng FM (F là một tiêu điểm của (E)) cắt đường tròn (F; 2a) tại N, khi đó tiếp tuyến tại M của (E) là trung trực của đoạn F'N(F' là tiêu điểm thứ hai của (E))

Kết quả 6. Cho elip (E) với các đỉnh A_1, A_2 cùng các tiếp tuyến của (E) là A_1z, A_2t. Tiếp tuyến tại M thuộc (E) khác A_1, A_2 cắt các đường thẳng A_1z, A_2t tại E, F. Tập hợp các giao điểm I của A_1F, A_2E là elip có độ dài trục lớn 2a, độ dài trục bé b.

Kết quả 7. Cho elip (E) với các đỉnh A_1, A_2 cùng các tiếp tuyến của (E) là A_1z, A_2t. Tiếp tuyến tại M thuộc (E) khác A_1, A_2 cắt các đường thẳng A_1z, A_2t tại E, F. Ta có $\widehat{EF_1F} = \widehat{EF_2F} = 1v$ (F_1, F_2 là các tiêu điểm)

Kết quả 8. Cho elip (E) với các đỉnh A_1, A_2 cùng các tiếp tuyến của (E) là A_1z, A_2t. Tiếp tuyến tại M thuộc (E) khác A_1, A_2 cắt các đường thẳng A_1z, A_2t tại E, F. Ta có $A_1E.A_2F = b^2$.

Kết quả 9. Cho elip (E) có 2a >2b. M là một điểm thay đổi trên (E). d là đường thẳng vuông góc với tiếp tuyến của (E) tại M. Đường thẳng qua M vuông góc với Ox cắt đường tròn chính tại C, D. d cắt các đường thẳng OC, OD tại I, J. Khi đó M là trung điểm của IJ và $MI^2 = MJ^2 = MF_1.MF_2$.

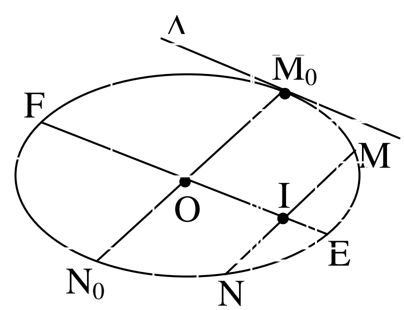
Bài toán 1. Cho elip (E) với các tiêu điểm F_1, F_2. Dựng tiếp tuyến của (E) tại M_0 cho trước thuộc (E) với bộ dụng cụ dựng hình là compa và thước thẳng.

Lời giải: Gọi Δ là tiếp tuyến cần dựng.

Cách 1. Áp dụng kết quả 1. Ta chỉ cần dựng Δ là phân giác ngoài của góc $\widehat{F_1M_0F_2}$.

Cách 2. Áp dụng kết quả 2.

- Dựng đường kính M_0N_0.
- Dựng dây MN // M_0N_0.
  Gọi I là trung điểm của MN.
- Dựng đường kính EF đi qua O, I.
- Dựng Δ qua M_0 và song song EF.

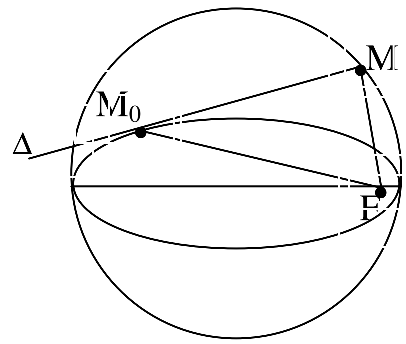


Cách 3. Áp dụng kết quả 3.

- Dựng vòng chính của (E).
- Dựng đường tròn đường kính M_oF

(F là một tiêu điểm của (E))
cắt vòng chính của (E) tại M.

- Dựng Δ qua M và M_0.



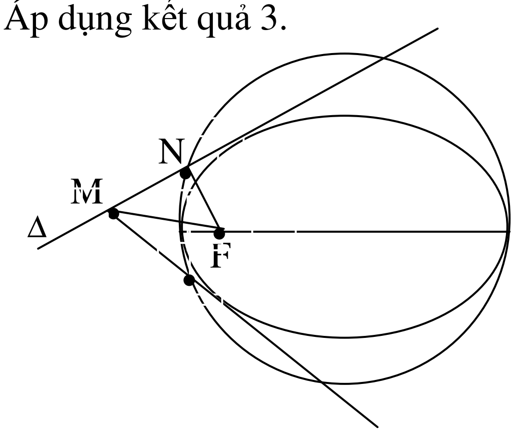
Bài toán 2. Cho elip (E) với các tiêu điểm F_1, F_2. Dựng tiếp tuyến của (E) biết rằng tiếp tuyến đi qua M cho trước nằm ngoài (E) với bộ dụng cụ dựng hình là compa và thước thẳng.

Lời giải: Gọi Δ là tiếp tuyến cần dựng. Áp dụng kết quả 3.

- Dựng vòng chính của (E).
- Dựng đường tròn đường kính MF

(F là một tiêu điểm của (E))
cắt vòng chính của (E) tại N.

- Dựng Δ qua M và N.



2. Cônic là một hypebol.

Hoàn toàn tương tự elip, sau đây là một số kết quả gắn liền với hypebol mà ta có thể vận dụng.

Kết quả 1. Cho hypebol (H) với các tiêu điểm F_1, F_2. Tiếp tuyến của (H) tại M_o là phân giác trong của góc $\widehat{F_1M_0F_2}$.

Kết quả 2. Cho hypebol (H) với các tiêu điểm F_1, F_2. Một họ đường thẳng có phương k (hệ số góc k) cắt (H) theo các dây. Khi đó tập hợp các trung điểm của các dây thuộc một đường thẳng đi qua tâm của (H) và có phương k' sao cho:

$$k.k' = \frac{b^2}{a^2}$$

Tập hợp các trung điểm nói trên được gọi là đường kính liên hợp với phương k. Ta cũng biết rằng, đường kính liên hợp với phương k có phương k' khi và chỉ khi đường kính liên hợp với phươg k' có phương k.

Kết quả 3. Cho hypebol (H) tâm O có độ dài trục thực 2a. Đường tròn (O; a) gọi là vòng chính của (H). Với điểm M thuộc vòng chính của (H) thì đường thẳng Δ vuông góc MF tại F (trong đó F là một trong hai tiêu điểm của (H)) là một tiếp tuyến của (H).

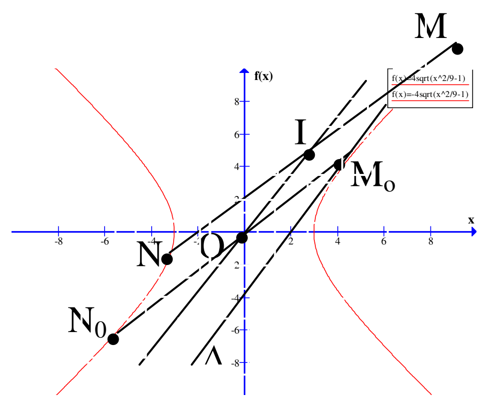
Bài toán 3. Cho hypebol (H) với các tiêu điểm F_1, F_2. Dựng tiếp tuyến của (H) tại M_0 cho trước thuộc (H) với bộ dụng cụ dựng hình là compa và thước thẳng.

Lời giải: Gọi Δ là tiếp tuyến cần dựng.

Cách 1. Áp dụng kết quả 4. Ta chỉ cần dựng Δ là phân giác ngoài của góc $\widehat{F_1M_0F_2}$.

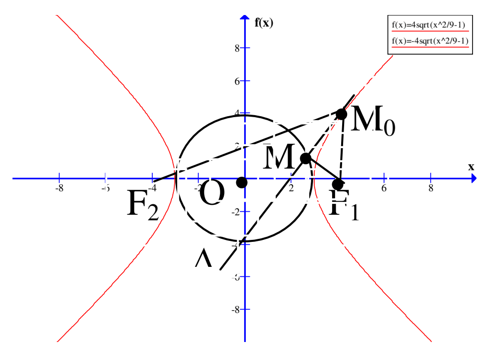
Cách 2. Áp dụng kết quả 5.

- Dựng đường kính M_0N_0.
- Dựng dây MN // M_0N_0.
  Gọi I là trung điểm của MN.
- Dựng đường kính đi qua O, I.
- Dựng Δ qua M_0 và song song OI.



Cách 3. Áp dụng kết quả 6.

- Dựng vòng chính của (H).
- Dựng đường tròn đường kính M_oF (F là một tiêu điểm của (H)) cắt vòng chính của (H) tại M.
- Dựng Δ qua M và M_0.



Bài toán 4. Cho hypebol (H) với các tiêu điểm F_1, F_2. Dựng tiếp tuyến của (H) biết rằng tiếp tuyến đi qua M cho trước nằm ngoài (H) với bộ dụng cụ dựng hình là compa và thước thẳng.

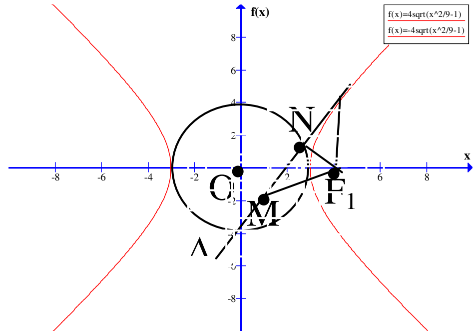
Lời giải: Gọi Δ là tiếp tuyến cần dựng. Áp dụng kết quả 6.

- Dựng vòng chính của (H).

- Dựng đường tròn đường kính MF

(F là một tiêu điểm của (H)) cắt vòng chính của (E) tại N.

- Dựng Δ qua M và N.



3. Cônic là một parabol.

Hoàn toàn tương tự elip và hypebol, ta có các kết quả cho parabol.