PHƯƠNG TRÌNH KHÔNG MẪU MỰC

Ta xem **phương trình không mẫu mực** những phương trình không thể biến đổi tương tương, hoặc biến đổi hệ quả từ đầu cho đến khi kết thúc. Một sự phân loại như thế chỉ có tính tương đối.

I. PHƯƠNG TRÌNH GIẢI BẰNG PHƯƠNG PHÁP ĐẶT ẨN PHỤ.

1. Mục đích đặt ẩn phụ.

1.1. Hạ bậc một số phương trình bậc cao.

• ***Đưa một số phương trình bậc 4 về phương trình trùng phương.***

Phương trình bậc bốn: $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$ ($a \neq 0$) đưa về được phương trình trùng phương chỉ khi đồ thị hàm số:

$f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$

có trục đối xứng. Gọi $x = x_0$ là trục đối xứng. Phép đặt ẩn phụ $x = x_0 + X$ sẽ đưa phương trình $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$ về phương trình trùng phương.

<u>Ví dụ 1:</u> Giải phương trình $x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 12x - 1 = 0$

Giải. Đặt $y = x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 12x - 1$

Giả sử đường thẳng $x = x_0$ là trục đối xứng của đồ thị hàm số.

Khi đó qua phép biến đổi: $\begin{cases} x = x_0 + X \\ y = Y \end{cases}$ hàm số đã cho trở thành:

$$\begin{aligned} Y = {} & (x_0 + X)^4 - 4(x_0 + X)^3 - 2(x_0 + X)^2 + 12(x_0 + X) - 1 \\ = {} & x_0^4 + 4x_o^3X + 6x_o^2X^2 + 4x_0X^3 + X^4 - \\ & - 4x_0^3 - 12x_0^2X - 12x_0X^2 - 4X^3 - \\ & - 2x_0^2 - 4x_0X - 2X^2 + \\ & + 12x_0 + 12X - \\ & - 1 \end{aligned}$$

Y là hàm số chẵn của X $\Leftrightarrow \begin{cases} 4x_0 - 4 = 0 \\ 4x_0^3 - 12x_0^2 - 4x_0 + 12 = 0 \end{cases}$

Suy ra: $x_0 = 1$ và $Y = X^4 - 8X^2 + 6$

Phương trình đã cho tương đương với: $X^4 - 8X^2 + 6 = 0 \Leftrightarrow X^2 = 4 \pm\sqrt{10}$

$$\Leftrightarrow X = \pm\sqrt{4-\sqrt{10}},\ X = \pm\sqrt{4+\sqrt{10}}$$

Suy ra phương trình có 4 nghiệm: $x = 1 \pm\sqrt{4-\sqrt{10}}$, $x = 1 \pm\sqrt{4+\sqrt{10}}$

<u>Ví dụ 2:</u> Giải phương trình $x^4 + 8x^3 + 12x^2 - 16x + 3 = 0$

Giải. Đặt $y = x^4 + 8x^3 + 12x^2 - 16x + 3$.

Giả sử đường thẳng $x = x_0$ là trục đối xứng của đồ thị hàm số.

Khi đó qua phép biến đổi: $\begin{cases} x = x_0 + X \\ y = Y \end{cases}$ hàm số đã cho trở thành:

Y = $(x_0 + X)^4 + 8(x_0 + X)^3 + 12(x_0 + X)^2 - 16(x_0 + X) + 3 =$

$= \ x_0^4 + \ 4x_o^3X + \ 6x_o^2X^2 + 4x_0X^3 + X^4 -$

$+8x_0^3 + 24x_0^2X + 24x_0X^2 + \ 8X^3 +$

$+12x_0^2 + 24x_0X + 12X^2 +$

$-16x_0 - \ 16X +$

$+3$

Y là hàm số chẵn, suy ra: $x_0 = -2$

$Y = X^4 - 12X^2 + 35$

$Y = 0 \Leftrightarrow X^2 = 5,\ X^2 = 7 \Leftrightarrow X = \pm\sqrt{5},\ X = \pm\sqrt{7}$

Suy ra bốn nghiệm $X = -2 \pm\sqrt{5}$, $X = -2 \pm\sqrt{7}$

<u>Bài tập tương tự:</u>

BT1. Giải phương trình $2x^4 - 16x^3 + 43x^2 - 44x + 14 = 0$

ĐSố: $x = 2 \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $x = 2 \pm\sqrt{2}$.

BT2. Giải phương trình $6x^4 + 24x^3 + 23x^2 - 2x - 1 = 0$

ĐSố: $x = -1 \pm\sqrt{\dfrac{2}{3}}$, $x = -1 \pm\sqrt{\dfrac{3}{2}}$.

• ***Đưa phương trình bậc bốn dạng: (x - a)(x - b)(x - c)(x - d) = m, trong đó a + d = b + c về phương trình bậc hai.***

Do a + d = b + c nên phương trình đã cho tương đương:

$(x - a)(x - d)(x - b)(x - c) = m \Leftrightarrow [x^2 - (a+d)x + ad]\,[x^2 - (b+c)x + bc] = m$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (X + ad)(X + bc) = m \\ x^2 - (a + d)x = X = x^2 - (b + c)x \end{cases}$$

Phương trình đã cho chuyển được chuyển về: $(X + ad)(X + bc) = m$

$\Leftrightarrow X^2 + (ad + bc)X + abcd - m = 0$

<u>Ví dụ 1:</u> Giải phương trình $(x - 1)(x - 2)(x + 3)(x + 4) = 14$.

Giải. Phương trình đã cho tương đương với:

$(x - 1)(x + 3)(x - 2)(x + 4) = 14$

$\Leftrightarrow (x^2 + 2x - 3)(x^2 + 2x - 8) = 14$

$\Leftrightarrow \begin{cases} (X - 3)(X - 8) = 14 \\ x^2 + 2x = X \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X^2 - 11X + 10 = 0 \\ x^2 + 2x = X \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X = 1, X = 10 \\ x^2 + 2x = X \end{cases}$

$\Leftrightarrow x = -1 \pm\sqrt{2}$, $x = -1 \pm\sqrt{11}$.

<u>Ví dụ 2:</u> Giải phương trình $(x^2 - 1)(x + 2)(x + 4) = 7$

Giải. Phương trình đã cho tương đương với:

$(x - 1)(x + 4)(x + 1)(x + 2) = 7$

$\Leftrightarrow (x^2 + 3x - 4)(x^2 + 3x + 2) = 7$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}(X-4)(X+2)=7\\ x^2+3x=X\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}X^2-2X-15=0\\ x^2+3x=X\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}X=-3, X=5\\ x^2+3x=X\end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{-3\pm\sqrt{29}}{2}$$

<u>Ví dụ 3:</u> Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình sau:

$$(x^2 - 1)(x + 3)(x + 5) = m$$

a) Có nghiệm.

b) Có bốn nghiệm phân biệt.

Giải. Phương trình đã cho tương đương với:

$(x - 1)(x + 5)(x + 1)(x + 3) = m$

$\Leftrightarrow (x^2 + 4x - 5)(x^2 + 4x + 3) = m$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}(X-5)(X+3)=m\\ x^2+4x=X\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}X^2-2X-15=m & (1)\\ x^2+4x=X & (2)\end{cases}$$

a) Phương trình (2) có nghiệm $\Leftrightarrow X \geq -4$

Phương trình đã cho có nghiệm chỉ khi phương trình (1) có nghiệm $X \geq -4$.

Cách 1: Phương trình (1) có nghiệm $X \geq -4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(-4)\leq 0\\ \begin{cases}\Delta'\geq 0\\ f(-4)\geq 0\\ -\dfrac{b}{2a}\geq -4\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow m \geq -16$

Cách 2: Hàm số $f(X) = X^2 - 2X - 15$, $X \geq -4$ có $f'(X) = 2X - 2$. f(X) liên tục trên $[-4; +\infty)$ và có cực tiểu duy nhất trên đó tại $X = 1$.

Suy ra, trên $[-4; +\infty)$ ta có $\min f(X) = f(1) = -16$. Vậy phương trình (1) có nghiệm $X \geq -4$ khi $m \geq -16$.

b) 4 nghiệm phân biệt ?

Thấy ngay là các phương trình $x^2 + 4x = X_1$, $x^2 + 4x = X_2$ có nghiệm trùng nhau khi và chỉ khi $X_1 = X_2$. Do vậy phương trình đã cho có 4 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt $X_1 > X_2 \geq -4$.

Cách 1. Ta phải có: $\begin{cases} \Delta' > 0 \\ f(-4) \geq 0 \\ -\dfrac{b}{2a} > -4 \end{cases} \Leftrightarrow -16 < m \leq 9$

Cách 2: Hàm số $f(X) = X^2 - 2X - 15$, $X \geq -4$ có $f'(X) = 2X - 2$.

X	-4		1		$+\infty$
f '(X)		-	0	+	
f(X)	9	↘	- 16	↗	$+\infty$

<u>Bài tập tương tự:</u>

BT1. Giải phương trình $x^4 - 2x^3 - 7x^2 + 8x + 7 = 0$.

HD. Tìm a, b: $(x^2 - x + a)(x^2 - x + b) = x^4 - 2x^3 - 7x^2 + 8x + 7$. Đặt $x^2 - x = t$

BT2. Cho phương trình $(x + 1)(x + 2)(x + 3)(x + 4) = m$.

- ***Đưa phương trình bậc bốn dạng: $ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0 (a \neq 0)$***

Thấy ngay x = 0 không thoả phương trình.

Chia hai vế của phương trình cho x^2:

Phương trình đã cho tương đương **:** $ax^2 + bx + c + b\dfrac{1}{x} + a\dfrac{1}{x^2} = 0$

$$\Leftrightarrow a\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + b(x + \frac{1}{x}) + c = 0 \Leftrightarrow a\left(X^2 - 2\right) + bX + c = 0,$$

trong đó $X = x + \dfrac{1}{x}$ hay $x^2 - Xx + 1 = 0$, $|X| \geq 2$

VD1. Giải phương trình $2x^4 + 3x^3 - 10x^2 + 3x + 2 = 0$.

$$\Leftrightarrow 2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 3(x + \frac{1}{x}) - 10 = 0 \Leftrightarrow 2\left(X^2 - 2\right) + 3X - 10 = 0 \Leftrightarrow 2X^2 + 3X - 14 = 0$$

$\Leftrightarrow X = 2, X = -\dfrac{7}{2}$, trong đó $X = x + \dfrac{1}{x}$ hay $x^2 - Xx + 1 = 0$, $|X| \geq 2$

i) X = 2: $x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$

ii) $X = -\dfrac{7}{2}$: $2x^2 + 7x + 2 = 0 \Leftrightarrow \dfrac{-7 \pm \sqrt{33}}{4}$

VD2. Cho phương trình $x^4 + hx^3 - x^2 + hx + 1 = 0$.

Tìm h để phương trình có không ít hơn hai nghiệm âm phân biệt.

Giải. $\Leftrightarrow \left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+h(x+\frac{1}{x})-1=0 \Leftrightarrow \left(X^2-2\right)+hX-1=0 \Leftrightarrow X^2+hX-3=0$ (1), trong đó

X = x + $\frac{1}{x}$ hay x^2 - Xx + 1 = 0 (2) , $|X|\geq 2$.

Cách 1. Phương trình (2) nếu $|X|\geq 2$ thì có hai nghiệm cùng dấu. Nên muốn có nghiệm âm thì

- b/a = X < 0. Suy ra X ≤ - 2. Nhưng (1) luôn luôn có hai nghiệm $X_1 < 0 < X_2$ nên chỉ mang về cho (2) được X_1. Vậy $X_1 < -2 < 0 < X_2$. Khi đó f(- 2) < 0, f(X) = X^2+hX-3

$\Leftrightarrow 1-2h<0 \Leftrightarrow h>\frac{1}{2}$.

Cách 2. (1) $\Leftrightarrow h=\frac{3-X^2}{X}$, $|X|\geq 2$

Đặt $f(X)=\frac{3-X^2}{X}$, $|X|\geq 2$ $\Rightarrow f'(X)=\frac{3-X^2}{X}=\frac{-X^2-3}{X^2}<0, |X|\geq 2$

X	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
f '(X)		-				-	
f(X)	$+\infty$	↘	$\frac{1}{2}$		$-\frac{1}{2}$	↘	$-\infty$

Phương trình (2) nếu $|X|\geq 2$ thì có hai nghiệm cùng dấu. Nên muốn có nghiệm âm thì

- b/a = X < 0. Suy ra X ≤ - 2. Nhưng (1) luôn luôn có hai nghiệm $X_1 < 0 < X_2$ nên chỉ mang về cho (2) được X_1. Vậy $X_1 < -2 < 0 < X_2$. Theo trên: $h>\frac{1}{2}$.

<u>Bài tập tương tự:</u>

BT1. Giải phương trình $2x^4 - 5x^3 + 2x^2 - 5x + 2 = 0$.

BT2. Cho phương trình $x^4 + mx^3 - 2x^2 + mx + 1 = 0$.

Tìm m để phương trình có không ít hơn hai nghiệm dương phân biệt.

1.2. Làm mất căn thức.

VD1. Giải phương trình x(x + 5) = $2\sqrt[3]{x^2+5x-2}-2$

Giải. Đặt $\sqrt[3]{x^2+5x-2}$ = X $\Rightarrow$ $X^3+2=x^2+5x$

Phương trình đã cho $\Leftrightarrow$ $X^3-2X+4=0 \Leftrightarrow$ X = - 2 $\Rightarrow x^2+5x+6=0$ $\Rightarrow$ x = - 2, x = - 3

VD2. Cho phương trình $\sqrt{3+x}+\sqrt{6-x}-\sqrt{(3+x)(6-x)}=m$ (1)

1) Giải phương trình khi m = 3
2) Tìm tất cả các giá trị m để phương trình (1) có nghiệm.

Giải. Đặt $\sqrt{3+x}+\sqrt{6-x}=t, -3\le x\le 6 \Rightarrow t'=\frac{1}{2\sqrt{3+x}}-\frac{1}{2\sqrt{6-x}}, -3<x<6$.

$t'\ge 0 \Leftrightarrow -3<x\le\frac{3}{2}$

X	- 3		3/ 2		6
f '(X)		+	0	-	
f(X)	3	↗	$3\sqrt{2}$	↘	3

Suy ra: $3 \le t \le 3\sqrt{2}$

Ta có $\sqrt{(3+x)(6-x)}=\frac{t^2-9}{2}$

Phương trình đã cho tương đương: t - $\frac{t^2-9}{2}$ = m $\Leftrightarrow$ t^2 - 2t + 2m - 9 = 0 (*)

VD3. Cho phương trình $(x-3)(x+1)+4(x-3)\sqrt{\frac{x+1}{x-3}}=m$ (1)

1) Giải phương trình khi m = - 3
2) Tìm tất cả các giá trị m để phương trình (1) có nghiệm

HD. Đặt $(x-3)\sqrt{\frac{x+1}{x-3}}=t$ (1)

$\Rightarrow (x-3)(x+1)=t^2$, x ≤ - 1 hoặc x > 3 (2)

Phương trình $\Leftrightarrow$ t^2 + 4t = m (3)

1) m = - 3: Phương trình (3) $\Leftrightarrow$ t^2 + 4t + 3 = 0 $\Leftrightarrow$ t = - 1, t = - 3.

Thay vào (1):

* t = - 1: $(x-3)\sqrt{\frac{x+1}{x-3}}=-1 \Leftrightarrow \begin{cases}x-3<0\\(x-3)(x+1)=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x-3<0\\x^2-2x-4=0\end{cases} \Leftrightarrow x=1-\sqrt{5}$

$x=1-\sqrt{5}$ thoả điều kiện x ≤ - 1.

* t = - 3: $(x-3)\sqrt{\frac{x+1}{x-3}}=-3 \Leftrightarrow \begin{cases}x-3<0\\(x-3)(x+1)=9\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x-3<0\\x^2-2x-12=0\end{cases} \Leftrightarrow x=1-\sqrt{13}$

$x=1-\sqrt{13}$ thoả điều kiện x ≤ - 1.

2) (3) có nghiệm t $\Leftrightarrow$ m ≥ - 4.

Xét phương trình $(x-3)(x+1)=t^2$, x ≤ - 1 hoặc x > 3

$\Leftrightarrow$ x^2 - 2x - 3 = t^2, x ≤ - 1 hoặc x > 3

Đặt f(x) = x^2 - 2x - 3, x ≤ - 1 hoặc x > 3 f '(x) = 2x - 2

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
f '(x)		-				+	
f(x)	$+\infty$	$\searrow$	0		0	$\nearrow$	$+\infty$

vì $t^2 \geq 0$ nên (2) luôn luôn có nghiệm.

Cách 2. Nếu dùng định lý đảo về dấu của tam thức bậc hai thì với m ≥ - 4.

Xét 3 trường hợp khi thay vào (1):

i) t = 0: $(x-3)\sqrt{\dfrac{x+1}{x-3}} = 0$: Phương trình có nghiệm x = - 1.

ii) t > 0: (1) $\begin{cases} x-3>0 \\ (x-3)(x+1)=t^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>3 \\ F(x)=x^2-2x-3-t^2=0 \end{cases}$

Thấy ngay F(3) = $-t^2 < 0$ nên F(x) có nghiệm x > 3.

3i) t < 0: (1) $\begin{cases} x+1\leq 0 \\ (x-3)(x+1)=t^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\leq -1 \\ F(x)=x^2-2x-3-t^2=0 \end{cases}$

Thấy ngay F(- 1) = $-t^2 < 0$ nên F(x) có nghiệm x ≤ - 1.

VD4. Giải phương trình $\sqrt[n]{(x+1)^2} - 3\sqrt[n]{(x-1)^2} = -2\sqrt[n]{x^2-1}, n \geq 2$

HD. Thấy ngay x = ± 1 không thoả phương trình.

Với x ≠ ± 1:

Chia hai vế của phương trình cho $\sqrt[n]{x^2-1}$, ta có: $\sqrt[n]{\dfrac{x+1}{x-1}} - 3\sqrt[n]{\dfrac{x-1}{x+1}} = -2$ (1)

Đặt $\sqrt[n]{\dfrac{x+1}{x-1}} = t$, khi đó (1) ⇔ t - 3$\dfrac{1}{t}$ + 2 = 0 ⇔ $t^2 + 2t - 3 = 0$ ⇔ t = 1, t = - 3

i) t = 1 : $\sqrt[n]{\dfrac{x+1}{x-1}} = 1 \Leftrightarrow \dfrac{x+1}{x-1} = 1$: Vô nghiệm

ii) t = - 3: $\sqrt[n]{\dfrac{x+1}{x-1}} = -3$ (2)

+ n chẵn: (2) vô nghiệm

+ n lẻ: (2) $\Leftrightarrow \dfrac{x+1}{x-1} = (-3)^n \Leftrightarrow x+1=(x-1)(-3)^n \Leftrightarrow (3^n+1)x = 3^n - 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{3^n-1}{3^n+1}$

1.3. Làm mất giá trị tuyệt đối.

VD1. Tìm m để phương trình sau có nghiệm

$$x^2 - 2x - m|x-1| + m^2 = 0$$

HD. Đặt $|x-1| = t \ge 0 \Rightarrow x^2 - 2x = t^2 - 1$

Phương trình đã cho tương đương $t^2 - mt + m^2 - 1 = 0$ (1)

Phương trình đã cho có nghiệm khi chỉ khi phương trình (1) có nghiệm $t \ge 0$.

$\Delta = m^2 - 4m^2 + 4 = 4 - 3m^2$

i) $\Delta = 0 \Leftrightarrow 4 - 3m^2 = 0 \Leftrightarrow m = \pm\frac{2}{\sqrt{3}}$: Pt(1) có nghiệm kép $t = \frac{m}{2} \Rightarrow m = \frac{2}{\sqrt{3}}$ thoả

ii) $\Delta > 0 \Leftrightarrow -\frac{2}{\sqrt{3}} < m < \frac{2}{\sqrt{3}}$:

+ (1) có 2 nghiệm dương $\Leftrightarrow P > 0, S > 0 \Leftrightarrow m > 1$. Suy ra $1 < m < \frac{2}{\sqrt{3}}$ thoả

+ (1) có hai nghiệm trái dấu $\Leftrightarrow P < 0 \Leftrightarrow -1 < m < 1$

+ (1) có 1 nghiệm bằng 0 $\Leftrightarrow m = \pm 1$. Khi đó nghiệm kia $t = m$ nên $m = 1$ thoả

KL: $-1 < m \le \frac{2}{\sqrt{3}}$

VD2. Cho phương trình $|x^2 - 2x + m| = x - 1$ (1)

1) Giải phương trình khi m = 0.

2) Tìm m để phương trình (1) có 4 nghiệm phân biệt.

HD. Đặt $x - 1 = t \Rightarrow x^2 - 2x = t^2 - 1$

$$\text{Pt}(1) \Leftrightarrow |t^2 - 1 + m| = t \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} t \ge 0 \\ t^2 - t - 1 + m = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} t \ge 0 \\ t^2 + t - 1 + m = 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} t \ge 0 \\ f(t) = t^2 - t - 1 = -m \end{cases} \\ \begin{cases} t \ge 0 \\ g(t) = t^2 + t - 1 = -m \end{cases} \end{array}\right.$$

$f'(t) = 2t - 1$, $g'(t) = 2t + 1$

x	0	1/2	$+\infty$
f '(x)	-	0	+
f(x)	$-1 \searrow$	$-5/4$	$\nearrow +\infty$

x	0	$+\infty$
g '(x)	+	
g(x)	$-1 \nearrow$	$+\infty$

Vì $x = 1 + t$ nên **mỗi nghiệm t** cho (1) **một nghiệm x**. Suy ra không có m thoả

1.4. Lượng giác hoá các phương trình.

VD. Giải phương trình $x^3 + \sqrt{(1-x^2)^3} = x\sqrt{2(1-x^2)}$

HD. Do $1 - x^2 \ge 0 \Leftrightarrow -1 \le x \le 1$. Đặt $x = \cos t$, $t \in [0;\pi]$

Ptrình đã cho $\Leftrightarrow \cos^3 t + \sin^3 t = \sqrt{2}\sin t\cos t$

$\Leftrightarrow (\cos t+\sin t)^3-3\sin t\cos t(\sin t+\cos t)=\sqrt{2}\sin t\cos t$ (1)

Đặt sint + cost = X $\Rightarrow$ $\cos\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{X}{\sqrt{2}},|X|\le\sqrt{2},\sin t\cos t=\dfrac{X^2-1}{2}$.

(1) $\Leftrightarrow X^3-3X\dfrac{X^2-1}{2}=\sqrt{2}\dfrac{X^2-1}{2} \Leftrightarrow X^3+\sqrt{2}X^2-3X-\sqrt{2}=0$

$\Leftrightarrow (X-\sqrt{2})(X^2+2\sqrt{2}X+1)=0 \Leftrightarrow X-\sqrt{2}, X=-\sqrt{2}\pm 1$.

Nhưng $|X|\le\sqrt{2}\Rightarrow X=\sqrt{2}, X=1-\sqrt{2}$.

i) X = $\sqrt{2}$: sint + cost = $\sqrt{2}\Leftrightarrow x+\sqrt{1-x^2}=\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow \sqrt{1-x^2}=\sqrt{2}-x \Leftrightarrow \begin{cases}1-x^2=2-2\sqrt{2}x+x^2\\ \sqrt{2}-x\ge 0\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}2x^2-2\sqrt{2}x+1=0\\ x\le\sqrt{2}\end{cases} \Leftrightarrow x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

i) X = 1-$\sqrt{2}$: sint + cost = 1 -$\sqrt{2}\Leftrightarrow x+\sqrt{1-x^2}=1-\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow \sqrt{1-x^2}=1-\sqrt{2}-x \Leftrightarrow \begin{cases}1-x^2=2-2\sqrt{2}-2(1-\sqrt{2})x+x^2\\ 1-\sqrt{2}-x\ge 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x^2-(1-\sqrt{2})x+1-\sqrt{2}=0\\ x\le 1-\sqrt{2}\end{cases}$

$\Leftrightarrow x=\dfrac{1-\sqrt{2}-\sqrt{2\sqrt{2}-1}}{2}$.

1.5. Đại số hoá các phương trình lượng giác, mũ, loga.

VD1. Giải phương trình $\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x+\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x=4$

HD. Đặt $\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x=t>0 \Rightarrow \left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x=\dfrac{1}{t}$

Pt $\Leftrightarrow \dfrac{1}{t}+t=4 \Leftrightarrow$ t^2 - 4t + 1 = 0 $\Leftrightarrow t=2\pm\sqrt{3}$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x=2+\sqrt{3}\\ \left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x=2-\sqrt{3}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=2\\ \left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x=2-\sqrt{3}=\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^{-2}\end{array}\right. \Leftrightarrow x=2, x=-2.$

VD2. Cho phương trình $\left(5+2\sqrt{6}\right)^{\tan x}+\left(5-2\sqrt{6}\right)^{tanx}=m$

1) Giải phương trình khi m = 4
2) Giải và biện luận phương trình (1) theo m.

HD. Đặt $\left(5+2\sqrt{6}\right)^{\tan x}=t>0 \Rightarrow \left(5-2\sqrt{6}\right)^{\tan x}=\dfrac{1}{t}$

Pt đã cho tương đương $t+\dfrac{1}{t}=m \Leftrightarrow t^2-mt+1=0$ (1)

1) m = 4: $t = 2 \pm \sqrt{3} \Leftrightarrow \left(5+2\sqrt{6}\right)^{\tan x} = 2 \pm \sqrt{3} \Leftrightarrow tanx = \log_{5+2\sqrt{6}}\left(2 \pm \sqrt{3}\right)$

$$\Leftrightarrow x = arctan\left[\log_{5+2\sqrt{6}}\left(2 \pm \sqrt{3}\right)\right] + k\pi$$

2) Ptrình đã cho có nghiệm khi và chỉ khi Pt(1) có nghiệm t > 0

Thấy ngay rằng, nếu (1) có nghiệm thì có hai nghiệm cùng dấu. Do vậy nếu pt (1) có nghiệm dương thì có hai nghiệm dương. Suy ra, cần và đủ là:

$\begin{cases} \Delta = m^2 - 4 \geq 0 \\ S = m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \geq 2$. Khi đó t = $\dfrac{m \pm \sqrt{m^2-4}}{2} \Leftrightarrow \left(5+2\sqrt{6}\right)^{\tan x} = \dfrac{m \pm \sqrt{m^2-4}}{2}$

$\Leftrightarrow \tan x = \log_{5+2\sqrt{6}} \dfrac{m \pm \sqrt{m^2-4}}{2} \Leftrightarrow x = \arctan\left(\log_{5+2\sqrt{6}} \dfrac{m \pm \sqrt{m^2-4}}{2}\right) + k\pi$.

2. Các kiểu đặt ẩn phụ.

1.1. Đặt một ẩn phụ chuyển phương trình về phương trình của ẩn phụ.

VD. Giải và biện luận phương trình $3\sqrt{x-1} + m\sqrt{x+1} = 2\sqrt[4]{x^2-1}$

HD. Thấy rằng x = - 1 không thoả ptrình.

Pt đã cho tương đương với $3\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}} + m = 2\sqrt[4]{\dfrac{x-1}{x+1}}$ (1)

Đặt $\sqrt[4]{\dfrac{x-1}{x+1}} = t \geq 0$. Khi đó (1) $\Leftrightarrow 3t^2 - 2t + m = 0$ (2)

Ptrình đã cho có nghiệm khi và chỉ khi (2) có nghiệm không âm

Cách 1: Phương trình (2) có 2 nghiệm trái dấu $\Leftrightarrow$ m < 0

Phương trình (2) có 2 nghiệm không âm $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' \geq 0 \\ P \geq 0 \\ S \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leq m \leq \dfrac{1}{3}$

Hai nghiệm của (2) là $t = \dfrac{1 \pm \sqrt{1-3m}}{3}$

Như thế, **khi m < 0:**

$$t = \frac{1+\sqrt{1-3m}}{3} \Rightarrow \sqrt[4]{\frac{x-1}{x+1}} = \frac{1+\sqrt{1-3m}}{3} \Rightarrow \frac{x-1}{x+1} = \left(\frac{1+\sqrt{1-3m}}{3}\right)^4 = M_1 \Rightarrow x = \frac{1-M_1}{1+M_1}$$

khi 0 ≤ m ≤ $\dfrac{1}{3}$: $\Rightarrow \sqrt[4]{\dfrac{x-1}{x+1}} = \dfrac{1 \pm \sqrt{1-3m}}{3} \Rightarrow \dfrac{x-1}{x+1} = \left(\dfrac{1+\sqrt{1-3m}}{3}\right)^4 = M_1 \Rightarrow x = \dfrac{1-M_1}{1+M_1}$

hoặc

$$\frac{x-1}{x+1} = \left(\frac{1-\sqrt{1-3m}}{3}\right)^4 = M_2 \Rightarrow x = \frac{1-M_2}{1+M_2}$$

1.2. Đặt một ẩn phụ và duy trì ẩn cũ trong cùng một phương trình.

VD1. Giải phương trình 2(1 - x)$\sqrt{x^2+2x-1} = x^2 - 2x - 1$

HD. Cách 1: Đặt $\sqrt{x^2+2x-1}=t\geq 0 \Rightarrow x^2+2x-1=t^2 \Rightarrow x^2-2x-1=t^2-4x$

Pt $\Leftrightarrow$ $2(1-x)t=t^2-4x \Leftrightarrow t^2-2(1-x)t-4x=0$

$\Delta'=(x+1)^2 \Rightarrow t=(1-x)\pm(x+1) \Leftrightarrow t=2, t=-2x$

$t=-2x\geq 0 \Rightarrow x\leq 0$: $\sqrt{x^2+2x-1}=-2x \Leftrightarrow x^2+2x-1=4x^2 \Rightarrow 3x^2-2x+1=0$: VN

$t=2$: $\sqrt{x^2+2x-1}=2 \Leftrightarrow x^2+2x-5=0 \Rightarrow x=-1\pm\sqrt{5}$

Cách 2: Pt $\Leftrightarrow$ $(x-1)^2-2(x-1)\sqrt{x^2+2x-1}-2=0$

VD2. Giải phương trình $(4x-1)\sqrt{x^2+1}=2x^2+2x+1$

Cách 1: Đặt $\sqrt{x^2+1}=t$

Cách 2: Bình phương hai vế

1.3. ***Đặt một ẩn phụ và duy trì ẩn cũ trong một hệ phương trình***.

VD1. Giải phương trình $x^2+\sqrt{x+5}=5$

HD. Đặt $\sqrt{x+5}=y\geq 0 \Rightarrow y^2=x+5$ (1)

Từ Pt đã cho $\Rightarrow$ $x^2=5-y$ (2)

Trừ từng vế (1) và (2) ta có: $y^2-x^2=x+y \Leftrightarrow x+y=0$ hoặc $y-x-1=0$

i) $x=y=0 \Leftrightarrow y=-x\geq 0 \Rightarrow x\leq 0$: (1) $\Leftrightarrow x^2-x-5=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{-1\pm\sqrt{21}}{2}$

Nhưng $x\leq 0$ nên $x=\dfrac{-1-\sqrt{21}}{2}$

ii) $y-x-1=0 \Leftrightarrow y=x+1\geq 0 \Leftrightarrow x\geq -1$: (2) $\Leftrightarrow x^2-x-4=0$

$\Leftrightarrow x=\dfrac{-1\pm\sqrt{17}}{2}$

Nhưng $x\geq -1$ nên $\dfrac{-1+\sqrt{17}}{2}$

Cách 2.(Biến đổi Pt về dạng tích)

$x^2+\sqrt{x+5}=5 \Leftrightarrow x^2-(x+5)+(x+\sqrt{x+5})=0 \Leftrightarrow (x+\sqrt{x+5})(x-\sqrt{x+5}+1)=0$

VD2. Giải phương trình $x^3+1=2\sqrt[3]{2x-1}$

HD. Đặt $\sqrt[3]{2x+1}=y \Rightarrow y^3=2x+1$ (1)

Từ Pt đã cho $\Rightarrow$ $x^3=2y-1$ (2)

Hệ (1)&(2) là một hệ đối xứng loại 2.

Cách 2.(Dùng tính chất đồ thị của hai hàm ngược nhau)

Pt đã cho tương đương $\dfrac{x^3+1}{2}=\sqrt[3]{2x-1}$ (1)

Các hàm số $y=\dfrac{x^3+1}{2}$, $y=\sqrt[3]{2x-1}$ là các hàm số ngược của nhau. Vậy nên phương trình (1) tương đương $\dfrac{x^3+1}{2}=x \Leftrightarrow x^3-2x+1=0 \Leftrightarrow x=1$, $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$

VD3. Giải phương trình $(x^2 - 3x - 4)^2 - 3x^2 + 8x + 8 = 0$

HD. Ptrình đã cho tương đương $(x^2 - 3x - 4)^2 - 3(x^2 - 3x - 4) - 4 - x = 0$

$\Leftrightarrow (x^2 - 3x - 4)^2 - 3(x^2 - 3x - 4) = 4 + x$

Đặt $x^2 - 3x - 4 = y \Rightarrow x^2 - 3x = 4 + y$ (1)

Từ phương trình đã cho suy ra $y^2 - yx = 4 + x$ (2)

Hệ (1)&(2) là một hệ đối xứng loại 2.

VD4. Giải phương trình $7x^2 + 7x = \sqrt{\frac{4x+9}{28}}$

PP chuyển về hệ đối xứng loại 2:

- VT bậc hai, VP căn hai
- Nên đặt $\sqrt{\frac{4x+9}{28}} = at + b$ (bậc nhất của t để khi bình phương thì thành bậc hai)
- Khi đặt ta được ngay : $7x^2 + 7x = at + b$

  Ta phải có một pt mới: $7t^2 + 7t = ax + b$

$$\sqrt{\frac{4x+9}{28}} = at + b \Rightarrow x = 7a^2t^2 + 14abt + 7b^2 - 9/4$$

$$\Rightarrow ax + b = 7a^3t^2 + 14a^2bt + 7ab^2 - \frac{9}{4}a$$

$$\equiv 7t^2 + 7t$$

Ta phải có: $\begin{cases} 7a^3 = 1 \\ 14a^2b = 7 \\ 7ab^2 - \frac{9}{4}a + b = 0 \end{cases} \Rightarrow a = 1,\ b = \frac{1}{2}$

<u>Bài tập tương tự:</u>

BT1. Giải phương trình $2x^2 - 6x - 1 = \sqrt{4x+5}$

(Thi chọn ĐT12QB 21/12/2004)

BT2. Giải và biện luận theo a phương trình $x^3 + a(2 - a^2) = 2\sqrt[3]{2x + a(a^2 - 2)}$

1.4. *Đặt hai ẩn phụ và đưa phương trình về phương trình hai ẩn phụ.*

VD1. Giải phương trình $\sqrt{x^2 - 3} + \sqrt{x^2 + x - 5} = 1 + \sqrt{x^4 + x^3 - 8x^2 - 3x + 15}$

Đưa phương trình về dạng $u + v = 1 + uv$

VD2. Giải phương trình $2^{x^2-3x+2} + 2^{x^2-2x-15} = 1 + 2^{2x^2-5x-13}$

Đưa phương trình về dạng $u + v = 1 + uv$

1.5. *Đặt hai ẩn phụ và đưa phương trình về hệ phương trình hai ẩn.*

VD1. Giải phương trình $\sqrt{4+x} + \sqrt{5-x} = 3$

HD. Đặt $\sqrt{4+x} = u \geq 0$, $\sqrt{5-x} = v \geq 0 \Rightarrow u^2 + v^2 = 9$

Ta có hệ phương trình $\begin{cases} u^2 + v^2 = 9 \\ u + v = 3 \end{cases}$

Cách 2. Bình phương hai vế.

Cách 3. Đặt f(x) = $\sqrt{4+x} + \sqrt{5-x} \ge 0 \Rightarrow f^2(x) = 9 + 2\sqrt{(4+x)(5-x)} \ge 9 \Leftrightarrow f(x) \ge 3$

Dấu đẳng thức xảy ra khi chỉ khi x = - 4 hoặc x = 5.

Cách 4. Đặt f(x) = $\sqrt{4+x} + \sqrt{5-x}$, $x \in [-4;5]$. Khảo sát, lập bảng biến thiên.

VD2. Giải phương trình $\sqrt{3+x} + \sqrt{6-x} - \sqrt{(3+x)(6-x)} = 3$.

HD. Đặt $\sqrt{3+x} = u \ge 0,\ \sqrt{6-x} = v \ge 0 \quad \Rightarrow u^2 + v^2 = 9$

Ta có hệ phương trình $\begin{cases} u^2 + v^2 = 9 \\ u + v - uv = 3 \end{cases}$

Cách 2. Đặt $\sqrt{3+x} + \sqrt{6-x} = X \ge 0 \Rightarrow \sqrt{(3+x)(6-x)} = \dfrac{X^2 - 9}{2}$

Phương trình đã cho tương đương $X - \dfrac{X^2 - 9}{2} = 3$

VD3. Giải phương trình $\sqrt{x+1} + 2(x+1) = x - 1 + \sqrt{1-x} + 3\sqrt{1-x^2}$

(TS 10 Chuyên Toán ĐHSPHNI, 97 - 98)

Đưa phương trình về hệ có một phương trình tích :

$$u + 2u^2 = -v^2 + v + 3uv \Leftrightarrow u - v + v^2 - 3uv + 2v^2 = 0$$
$$\Leftrightarrow u - v + (v - u)(v - 2u) = 0$$

1.6. *Đặt hai vế của phương trình cho cùng một ẩn phụ.*

VD1. Giải phương trình $2\log_3 \text{cotgx} = \log_2 \text{cosx}$

HD. Đặt $2\log_3 \text{cotgx} = \log_2 \text{cosx} =$ t ta có:

$$\begin{cases} \cos x = 2^t \\ \cot^2 x = 3^t \\ \cos x > 0, \cot x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos^2 x = 4^t \\ \dfrac{\cos^2 x}{\sin^2 x} = 3^t \\ \cos x > 0, \sin x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos^2 x = 4^t \\ \sin^2 x = \dfrac{4^t}{3^t} \\ \cot x > 0, \sin x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos^2 x = 4^t \\ \dfrac{4^t}{3^t} + 4^t = 1 \\ \cos x > 0, \sin x > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos^2 x = 4^t \\ t = -1 \\ \cos x > 0, \sin x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = \dfrac{1}{2} \\ \sin x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{3} + k2\pi$$

VD2. Giải phương trình $\log_7 \text{x} = \log_3 (\sqrt{\text{x}} + 2)$

HD. Đặt $\log_7 x = \log_3(\sqrt{x}+2) =$ t , Ta có:

$$\begin{cases} x = 7^t \\ \sqrt{x} + 2 = 3^t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 7^t \\ \sqrt{7^t} + 2 = 3^t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 7^t \\ \left(\dfrac{\sqrt{7}}{3}\right)^t + 2\left(\dfrac{1}{3}\right)^t = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 7^t \\ t = 2 \end{cases} \Rightarrow x = 49$$

VD3. Giải phương trình $\sqrt[3]{1-x} = \sqrt{1+x}$

HD. Đặt $\sqrt[3]{1-x} = \sqrt{1+x} = t \geq 0$, ta có:

$$\begin{cases} 1 - x = t^3 \\ 1 + x = t^2 \end{cases} \Rightarrow t^3 + t^2 - 2 = 0 \Rightarrow t = 1 \Rightarrow x = 0$$

II. PHƯƠNG TRÌNH GIẢI BẰNG PHƯƠNG PHÁP ĐỐI LẬP.

1. Dạng 1. Nếu $f(x) \geq M$, (1) (hay $f(x) \leq M$, (2)) thì:

Phương trình f(x) = M tương đương dấu đẳng thức ở (1) hay ở (2) xảy ra.

VD1. Giải phương trình $\tan x + \cot x + \tan^2 x + \cot^2 x + \tan^3 x + \cot^3 x = 6$.

HD. Phương trình đã cho $\Leftrightarrow \tan x(1 + \tan x + \tan^2 x) + \cot x(1 + \cot x + \cot^2 x) = 6$ (1)

$1 + \tan x + \tan^2 x > 0$, $1 + \cot x + \cot^2 x > 0$ với $\forall x \neq k\dfrac{\pi}{2}$

tanx và cotx cùng dấu.

Do vậy, từ (6) để ý rằng vế phải dương, suy ra tanx > 0, cotx > 0.

Theo Côsi: $\tan x + \cot x \geq 2$

$\tan^2 x + \cot^2 x \geq 2$ $\Rightarrow \tan x + \cot x + \tan^2 x + \cot^2 x + \tan^3 x + \cot^3 x \geq 6$.

$\tan^3 x + \cot^3 x \geq 2$

Phương trình đã cho tương đương: $\begin{cases} \tan x + \cot x = 2 \\ \tan^2 x + \cot^2 x = 2 \\ \tan^3 x + \cot^3 x = 2 \\ \tan x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \tan x = \cot x = 1 \\ \tan^2 x = \cot^2 x = 1 \\ \tan^3 x = \cot^3 x = 1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \tan x = \cot x = 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi$

VD2. Giải phương trình $x^2 + y^2 + \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{y^2} = 4$

HD. ĐK $x \neq 0$, $y \neq 0$.

$$x^2 + y^2 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = 4 \Leftrightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} + y^2 + \frac{1}{y^2} = 4$$

Ta có: $x^2 + \dfrac{1}{x^2} \geq 2$, $y^2 + \dfrac{1}{y^2} \geq 2 \Rightarrow x^2 + \dfrac{1}{x^2} + y^2 + \dfrac{1}{y^2} \geq 4$

Phương trình đã cho tương đương với: $\begin{cases} x^2+y^2=2 \\ \frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2=y^2=1 \\ \frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}=2 \end{cases}$ $\Leftrightarrow$ nghiệm của phương trình đã cho là (1; 1), (1; - 1), (-1; 1), (- 1; - 1)

2. Dạng 2.

Phương trình : $\begin{cases} f(x)=g(x) \\ f(x)\le M \le g(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)=M \\ g(x)=M \end{cases}$

VD1. Giải phương trình $4(x^2-2)(3-x^2) = (\sqrt{2}x-\sqrt{5})^2+1$

HD. $(x^2-2)(3-x^2) > 0 \Leftrightarrow 2 < x^2 < 3 \Rightarrow 3-x^2 > 0$, $x^2-2 > 0$. Theo Côsi:

$$(x^2-2)(3-x^2) \le \left(\frac{x^2-2+3-x^2}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow 4(x^2-2)(3-x^2) \le 1$$

Mặt khác $(\sqrt{2}x-\sqrt{5})^2+1 \ge 1$

Phươngtrình đã cho tương đương: $\begin{cases} 4(x^2-2)(3-x^2)=1 \\ \left(\sqrt{2}x-\sqrt{5}\right)^2+1=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-2=3-x^2 \\ x=\sqrt{\frac{5}{2}} \end{cases} \Leftrightarrow x=\sqrt{\frac{5}{2}}$

VD2. Giải phương trình $\sqrt{x-2}+\sqrt{4-x} = x^2-6x+11$

HD. ĐK $2 \le x \le 4$. Ta có:

$$\sqrt{x-2}+\sqrt{4-x} \le \sqrt{2(x-2+4-x)} = 2,\quad x^2-6x+11=(x-3)^2+2 \ge 2$$

Phươngtrình đã cho tương đương: $\begin{cases} \sqrt{x-2}+\sqrt{4-x}=2 \\ (x-3)^2+2=2 \end{cases} \Leftrightarrow x=2$

3. Dạng 3.

Phương trình : $\begin{cases} f(x)+g(x)=M+N \\ f(x)\le M, g(x)\le N \\ (hay: f(x)\ge M, g(x)\ge N) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)=M \\ g(x)=N \end{cases}$

VD1. Giải phương trình $\frac{36}{\sqrt{x-2}}+\frac{4}{\sqrt{y-1}} = 28-4\sqrt{x-2}-\sqrt{y-1}$

HD. Pt đã cho $\Leftrightarrow \frac{36}{\sqrt{x-2}}+4\sqrt{x-2}+\frac{4}{\sqrt{y-1}}+\sqrt{y-1}=28 \quad (1)$

$$\frac{36}{\sqrt{x-2}}+4\sqrt{x-2} \ge 24, \frac{4}{\sqrt{y-1}}+\sqrt{y-1} \ge 4$$

Như thế (1) tương đương:

$$\begin{cases}\dfrac{36}{\sqrt{x-2}}+4\sqrt{x-2}=24\\ \dfrac{4}{\sqrt{y-1}}+\sqrt{y-1}=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{36}{\sqrt{x-2}}=4\sqrt{x-2}\\ \dfrac{4}{\sqrt{y-1}}=\sqrt{y-1}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=11\\ y=5\end{cases}$$

VD2. Giải phương trình $\cos3x\sqrt{\dfrac{1}{\cos3x}-1}+\cos x\sqrt{\dfrac{1}{\cos x}-1}=1$

HD. Pt đã cho tương đương:

$$\cos3x\sqrt{\frac{1-\cos3x}{\cos3x}}+\cos x\sqrt{\frac{1-\cos x}{\cos x}}=1$$

ĐK: $\cos3x > 0$, $\cos x > 0$.

PT $\Leftrightarrow\sqrt{\cos3x(1-\cos3x)}+\sqrt{\cos x(1-\cos x)}=1 \quad (1)$

Ta đã biết rằng $a(1-a)\le\dfrac{1}{4},\forall a$. Suy ra: $0\le\cos3x(1-\cos3x)\le\dfrac{1}{4}$

$$\Rightarrow\sqrt{\cos3x(1-\cos3x)}\le\frac{1}{2}$$

Tương tự $\sqrt{\cos x(1-\cos x)}\le\dfrac{1}{2}$

Như thế Ptrình (1)

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{\cos3x(1-\cos3x)}=\dfrac{1}{2}\\ \sqrt{\cos3x(1-\cos3x)}=\dfrac{1}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\cos3x=\dfrac{1}{2}\\ \cos x=\dfrac{1}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4\cos^3x-3\cos x=\dfrac{1}{2}\\ \cos x=\dfrac{1}{2}\end{cases}$$: Vô nghiệm

4. Dạng 4.

Phương trình : $\begin{cases}f_1(x)+f_2(x)+...+f_n(x)=0\\ f_1(x)\ge0, f_2(x)\ge0,..., f_n(x)\ge0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}f_1(x)=0\\ f_2(x)=0\\ \text{............}\\ f_n(x)=0\end{cases}$

VD1. Giải phương trình $x^2-2x\sin xy+1=0$

HD. Pt đã cho tương đương: $(x-\sin xy)^2+1-(\sin xy)^2=0$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x-\sin xy=0\\ 1-\sin^2 xy=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\sin xy\\ \sin xy=\pm1\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\sin xy=1\\ x=1\end{cases}\\ \begin{cases}\sin xy=-1\\ x=-1\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\sin y=1\\ x=1\end{cases}\\ \begin{cases}\sin(-y)=-1\\ x=-1\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=1\\ y=\dfrac{\pi}{2}+k2\pi\end{cases}\\ \begin{cases}x=-1\\ y=\dfrac{\pi}{2}+k2\pi\end{cases}\end{array}\right.$$

VD2. Tìm tất cả các cặp số thực (x, y) thoả mãn :

$$x^2 + 2y^2 - 2xy - 2x + 4y + 2 = 0$$

(Thi HSG L9 Quảng Bình 2007 - 2008)

HD. Ta có: $x^2 + 2y^2 - 2xy - 2x + 4y + 2 = 0$

$\Leftrightarrow x^2 - 2(y+1)x + 2(y+1)^2 = 0$ (1)

Xét phương trình bậc hai (1) ẩn x và y là tham số

Ta có: $\Delta' = (y+1)^2 - 2(y+1)^2 = -(y+1)^2 \le 0, \quad \forall y$

Do đó, phương trình (1) có nghiệm x khi và chỉ khi $\Delta' = 0 \Leftrightarrow -(y+1)^2 = 0 \Leftrightarrow y = -1$

Khi đó phương trình (1) có nghiệm kép x = 0.

Vậy cặp số (x, y) cần tìm là (0, -1).

Ghi chú: Có thể giải bài toán bằng cách đưa về dạng $A^2 + B^2 = 0$

$x^2 + 2y^2 - 2xy - 2x + 4y + 2 = 0 \Leftrightarrow (y - x + 1)^2 + (y+1)^2 = 0$

III. PHƯƠNG TRÌNH GIẢI BẰNG PHƯƠNG PHÁP DỰ ĐOÁN NGHIỆM VÀ CHỨNG MINH KHÔNG CÒN NGHIỆM.

Phương pháp gồm hai bước:

1. Dự đoán nghiệm, thử vào phương trình.
2. Chứng minh không còn nghiệm.

VD1. Giải phương trình $3^x + 4^x = 5^x$

HD. Bước 1. Dự đoán: x = 2 là nghiệm

Chứng minh: $3^2 + 4^2 = 5^2$.

Bước 2. Chứng minh không còn nghiệm nữa.

Thật vậy: Pt tương đương với $\left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x = 1$

i) Nếu x > 0 i) Nếu x > 0 thì $\left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x < \left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2 = 1$: Không thoả pt.

ii) Nếu x > 0 i) Nếu x < 0 thì $\left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x > \left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2 = 1$: Không thoả pt.

VD2. Giải phương trình $2^{x^4+4} + 2^{x^4+5} + 1956^{x^2} = 49$

HD. Bước 1. Dự đoán: x = 0 là nghiệm

Chứng minh: $2^4 + 2^5 + 1956^0 = 49$.

Bước 2. Chứng minh không còn nghiệm nữa.

Thật vậy: Nếu $x \ne 0$ thì $x^4 > 0$, $x^4 + 4 > 4$, $x^5 + 5 > 5$

$\Rightarrow 2^{x^4+4} > 2^4 = 16, 2^{x^4+5} > 2^5 = 32, 1956^{x^4} > 1956^0 = 1$

$\Rightarrow 2^{x^4+4} + 2^{x^4+5} + 1956^{x^4} > 16 + 32 + 1 = 49$

VD3. Giải phương trình $20^{1-x^2} + 9^{1-x^2} + 1956^{1-x^2} = 1985$

HD. x = 0 là nghiệm

$x \neq 0 \Rightarrow x^2 > 0 \Rightarrow 1 - x^2 < 1 \Rightarrow 20^{1-x^2} < 20,\ 9^{1-x^2} < 9,\ 1956^{1-x^2} < 1956$

$\Rightarrow 20^{1-x^2} + 9^{1-x^2} + 1956^{1-x^2} < 1985$

VD4. Giải phương trình $19^{1-x^4} + 5^{1-x^4} + 1890^{1-x^2} = 3$

HD. x = $\pm$ 1 là nghiệm

$-1 < x < 1 \Rightarrow 1 - x^2 > 0 \Rightarrow 19^{1-x^4} + 5^{1-x^4} + 1890^{1-x^2} > 19^0 + 5^0 + 1890^0 = 3$

$x < -1$ hoặc $x > 1 \Rightarrow 1 - x^2 < 0 \Rightarrow 19^{1-x^4} + 5^{1-x^4} + 1890^{1-x^2} < 19^0 + 5^0 + 1890^0 = 3$

VD5. Giải phương trình $\sqrt[5]{x^2+28} + 2\sqrt[3]{x^2+23} + \sqrt{x-1} + \sqrt{x} = \sqrt{2} + 9$

HD. x = 1 là nghiệm

VD6. Giải phương trình $\sqrt[3]{x^2+26} + 3\sqrt{x} + \sqrt{x+3} = 8$

HD. x = 1 là nghiệm

VD7. Giải phương trình $|x-2007|^{1956} + |x-2008|^{1981} = 1$

HD. x = 2007, x= 2008 là nghiệm

i) $x < 2007 \Rightarrow x - 2008 < -1 \Rightarrow |x-2008| > 1 \Rightarrow |x-2008|^{1981} > 1$

$\Rightarrow |x-2007|^{1956} + |x-2008|^{1981} > 1$

ii) $x > 2008 \Rightarrow x - 2007 > 1 \Rightarrow |x-2007| > 1 \Rightarrow |x-2007|^{1956} > 1$

$\Rightarrow |x-2007|^{1956} + |x-2008|^{1981} > 1$

iii) $2007 < x < 2008 \Rightarrow 0 < x - 2007 < 1 \Rightarrow |x-2007| = x - 2007$

$|x-2007| < 1 \Rightarrow |x-2007|^{1956} < |x-2007| = x - 2007 \qquad (1)$

Tương tự: $-1 < x - 2008 < 0 \Rightarrow |x-2008| = 2008 - x$

$|x-2008| < 1 \Rightarrow |x-2008|^{1981} < |x-2008| = 2008 - x \qquad (2)$

Từ (1)&(2) suy ra: $\Rightarrow |x-2007|^{1956} + |x-2008|^{1981} < 1$

IV. BIỆN LUẬN SỐ NGHIỆM PHƯƠNG TRÌNH BẰNG PHƯƠNG PHÁP ĐẠO HÀM.

VD1. Biện luận theo m số nghiệm phương trình $\sqrt{x^4+4x+m} + \sqrt[4]{x^4+4x+m} = 6$

HD. Đặt $\sqrt[4]{x^4+4x+m} = t \geq 0$

Pt đã cho $\Leftrightarrow t^2 + t - 6 = 0 \Leftrightarrow t = 2$, t = - 3(loại)

Ta có $\sqrt[4]{x^4+4x+m} = 2 \Leftrightarrow x^4 + 4x = 16 - m$ (1)

Pt đã cho có nghiệm khi và chỉ khi pt(1) có nghiệm.

Đặt $f(x) = x^4 + 4x$, $x \in$ **R**.

$f'(x) = 4x + 4$

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
f '(x)		-	0	+	
f(x)	$+\infty$	↘	- 3	↗	$+\infty$

Ta có kết quả: i) 16 - m < - 3 $\Leftrightarrow$ m > 19: Vô nghiệm.

ii) 16 - m = - 3 $\Leftrightarrow$ m = 19: x = - 1.

iii) 16 - m > - 3 $\Leftrightarrow$ m < 19: Hai nghiệm phân biệt

VD2. Biện luận theo m số nghiệm phương trình $x+m=m\sqrt{x^2+1}$

HD.

x = 0 là nghiệm với mọi m.

x $\neq$ 0: Pt đã cho $\Leftrightarrow x=m\left(\sqrt{x^2+1}-1\right)\Leftrightarrow \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}-1}=m$

Đặt $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}-1}$, x $\neq$ 0

$$f'(x)=\frac{\sqrt{x^2+1}-1-x\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{\left(\sqrt{x^2+1}-1\right)^2}=\frac{1-\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}\left(\sqrt{x^2+1}-1\right)^2}<0,\ x\neq 0$$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f '(x)		-	||	+	
f(x)	1	↘	$-\infty$ || $+\infty$	↘	1

Ta có kết quả: i) m = 1 $\Leftrightarrow$ x = 0.

ii) m $\neq$ 1 $\Leftrightarrow$ x = 0 và 1 nghiệm khác.

<u>Bài tập tương tự:</u>

BT1. Chứng minh rằng nếu n là số tự nhiên chẵn và a là một số lớn hơn 3 thì phương trình sau vô nghiệm: $(n + 1)x^{n+2} - 3(n + 2)x^{n+1} + a^{n+2} = 0$

BT2. Tìm k để phương trình sau có 4 nghiệm phân biệt:

$$x^4 - 4x^3 + 8x - k = 0.$$

Giải phương trình khi k = 5.

BT3. Cho $3 \leq n \in \mathbb{N}$. Tìm nghiệm $x \in \left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$ của phương trình:

$$\cos^n x+\sin^n x=2^{\frac{2-n}{2}}$$

Chú ý rằng, bài toán này Trần Phương có một cách giải khác cách lập bảng biến thiên của hàm số, một cách giải đầy " **ấn tượng**":

$$+\begin{cases} \sin^n x+\sin^n x+2^{-\frac{n}{2}}+...2^{-\frac{n}{2}} \ge n\sqrt[n]{2^{\frac{n(2-n)}{2}}\left(\sin^n x\right)^2}=n.2^{\frac{2-n}{2}}\sin^2 x \\ \cos^n x+\cos^n x+2^{-\frac{n}{2}}+...2^{-\frac{n}{2}} \ge n\sqrt[n]{2^{\frac{n(2-n)}{2}}\left(\cos^n x\right)^2}=n.2^{\frac{2-n}{2}}\cos^2 x \end{cases}$$

Trong 2 vế trên có n - 2 hạng tử $2^{-\frac{n}{2}}$

$$\Rightarrow 2(\sin^n x+\cos^n x)+(n-2).2^{\frac{2-n}{2}} \ge n.2^{\frac{2-n}{2}}(\sin^2 x+\cos^2 x)=n.2^{\frac{2-n}{2}}$$

$$\Rightarrow \sin^n x+\cos^n x \ge n.2^{\frac{2-n}{2}} \qquad (1)$$

Để ý rằng sinx > 0, cosx > 0. Dấu đẳng thức ở (1) xảy ra khi chỉ khi cosx = sinx $\Leftrightarrow x=\sqrt{\frac{\pi}{4}}$.

V. BIỆN LUẬN PHƯƠNG TRÌNH VÀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH BẰNG CÁCH XÉT CÁC DẤU HIỆU CẦN VÀ ĐỦ

VD1. Tìm tất cả các nghiệm nguyên của phương trình

$$x^2+x+12\sqrt{x+1}=36$$

HD. Pt đã cho $\Leftrightarrow 12\sqrt{x+1}=36-x-x^2$

• **Dấu hiệu cần:** x = 0 là nghiệm thì $\begin{cases} x+1\ge 0 \\ 36-x-x^2 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow -1\le x \le \frac{-1+\sqrt{145}}{2}<6$

x nguyên nên x $\in \{0,1,2,3,4,5\}$

• **Dấu hiệu đủ:** Thử vào Ptrình thấy x = 3 thoả.

VD2. Tìm tất cả các giá trị m để phương trình sau có nghiệm duy nhất

$$2^{|x|}+|x|=\sqrt{1-|x|}+x^2+m$$

HD. • **Dấu hiệu cần:** Thấy x là nghiệm khi và chỉ khi - x cũng là nghiệm.

Vậy, **cần** để Pt đã cho có nghiệm duy nhất là x = - x $\Rightarrow$ x = 0 $\Rightarrow$ m = 0

• **Dấu hiệu đủ:** Khi m = 0, Pt đã cho trở thành $2^{|x|}+|x|=\sqrt{1-|x|}+x^2$

Thấy ngay x = 0 là nghiệm.

Với x $\neq$ 0: ĐK của ptrình đã cho $1-|x|\ge 0 \Leftrightarrow -1\le x\le 1 \Rightarrow |x|\ge x^2$ (1)

$|x|>0 \Rightarrow 2^{|x|}>2^0=1>\sqrt{1-|x|}$ (2)

Từ (1)&(2)suy ra $2^{|x|}+|x|>\sqrt{1-|x|}+x^2$

Như thế x = 0 là nghiệm duy nhất. Vậy m = 0 thoả.

VD3. Tìm tất cả các giá trị m để phương trình sau có nghiệm duy nhất

$$\sqrt{4-x}+\sqrt{5+x}=m$$

HD. • **Dấu hiệu cần:** x là nghiệm $\Leftrightarrow \sqrt{4-x}+\sqrt{5-x}=m$

$$\Leftrightarrow \sqrt{4-(-1-x)x}+\sqrt{5+(1-x)}=m$$

$\Leftrightarrow$ - 1 - x là nghiệm

vậy, cần để Pt đã cho có nghiệm duy nhất là x = - 1 - x $\Leftrightarrow$ x = - $\frac{1}{2}$ $\Rightarrow$ m = $3\sqrt{2}$

- **Dấu hiệu đủ:** Khi m = $3\sqrt{2}$ pt đã cho trở thành $\sqrt{4-x}+\sqrt{5+x}=3\sqrt{2}$

Giải Ptrình này thấy có đúng một nghiệm x = - $\frac{1}{2}$. Suy ra m = $3\sqrt{2}$ thoả.

VD4. Tìm tất cả các giá trị m để phương trình sau có nghiệm duy nhất

$$\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{1-x}+\sqrt{x}+\sqrt{1-x}=m.$$

HD. • **Dấu hiệu cần:** x là nghiệm $\Leftrightarrow$ $\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{1-x}+\sqrt{x}+\sqrt{1-x}=m$

$\Leftrightarrow$ $\sqrt[4]{1-x}+\sqrt[4]{1-(1-x)}+\sqrt{1-x}+\sqrt{1-(1-x)}=m$

$\Leftrightarrow$ 1 - x là nghiệm

vậy, cần để Pt đã cho có nghiệm duy nhất là x = 1 - x $\Leftrightarrow$ x = $\frac{1}{2}$

$\Rightarrow$ m = $\sqrt[4]{\frac{1}{2}}+\sqrt[4]{\frac{1}{2}}+\sqrt{\frac{1}{2}}+\sqrt{\frac{1}{2}}=2\sqrt[4]{\frac{1}{2}}+2\sqrt{\frac{1}{2}}=\sqrt[4]{8}+\sqrt{2}=\sqrt{2\sqrt{2}}+\sqrt{2}$

- **Dấu hiệu đủ:** Khi m = $\sqrt{2\sqrt{2}}+\sqrt{2}$ pt đã cho trở thành:

$$\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{1-x}+\sqrt{x}+\sqrt{1-x}=\sqrt{2\sqrt{2}}+\sqrt{2}$$

Ta có $\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{1-x}\le\sqrt{2\left(\sqrt{x}+\sqrt{1-x}\right)}\le\sqrt{2\sqrt{2(x+1-x)}}=\sqrt{2\sqrt{2}}$

$\sqrt{x}+\sqrt{1-x}\le\sqrt{2(x+1-x)}=\sqrt{2}$

Như thế Pt tương đương với $\begin{cases}\sqrt[4]{x}=\sqrt[4]{1-x}\\ \sqrt{x}=\sqrt{1-x}\end{cases}\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$ là nghiệm duy nhất.

Suy ra m = $\sqrt{2\sqrt{2}}+\sqrt{2}$ thoả.

VD5. Tìm tất cả các giá trị a để hệ phương trình sau có nghiệm với mọi b

$$\begin{cases}\left(x^2+1\right)^a+\left(b^2+1\right)^y=2\\ a+bxy+x^2y=1\end{cases}$$

HD. • **Dấu hiệu cần:** Hệ có nghiệm với mọi b thì có nghiệm với b = 0.

Khi đó hệ trở thành $\begin{cases}\left(x^2+1\right)^a=1 & (1)\\ a+x^2y=1 & (2)\end{cases}$

Từ (1) suy ra x = 0 thì a tuỳ ý.Từ (2) suy ra a = 1

Cũng từ (1) suy ra x $\neq 0$ thì a = 0.

- **Dấu hiệu đủ:**

i) a = 0 : hệ trở thành $\begin{cases} (b^2+1)^y = 1 & (3) \\ bxy + x^2y = 1 & (4) \end{cases}$

Khi b $\neq$ 0 : (3) $\Rightarrow$ y = 0 không thoả (4). Suy ra a = 0 không thoả.

ii) a = 1 : hệ trở thành $\begin{cases} x^2 + (b^2+1)^y = 1 & (3) \\ bxy + x^2y = 0 & (4) \end{cases}$

Khi b = 0 thì (4) $\Leftrightarrow$ x = y = 0 thoả (3) với mọi b. Suy ra a = 1 thoả.

<u>**Bài tập tương tự:**</u>

BT1. Tìm m để phương trình sau có nghiệm duy nhất: $\sqrt{3+x} + \sqrt{6-x} = m$

BT2. Tìm a để hệ sau có nghiệm duy nhất:

$$\begin{cases} 2^{|x|} + |x| = y + x^2 + a \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

BT3. Tìm a để hệ sau có nghiệm duy nhất:

$$\begin{cases} ax^2 + a - 1 = y - |\sin x| \\ \tan^2 x + y^2 = 1 \end{cases}$$

BT4. Tìm a để hệ sau có nhiều hơn 5 nghiệm:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 + a(x+y) = x - y + a \\ x^2 + y^2 + bxy - 1 = 0 \end{cases}$$

BT5. Tìm x để phương trình sau nghiệm đúng với mọi a:

$$\log_2(a^2x^3 - 5a^2x^2 - \sqrt{6-x}) = \log_{2+a^2}(3 - \sqrt{x-1})$$

VI. BIỆN LUẬN NGHIỆM CỦA PHƯƠNG TRÌNH BẰNG PHƯƠNG PHÁP DÙNG MIN, MAX.

- Với f(x) liên tục trên D, phương trình f(x) = m có nghiệm khi và chỉ khi m thuộc tập giá trị của f(x).
- Với f(x) liên tục trên D thì đạt giá trị lớn nhất và nhỏ nhất trên D. Khi đó phương trình f(x) = m có nghiệm khi và chỉ khi:

$$\min_{x\in D} f(x) \le m \le \max_{x\in D} f(x)$$

VD1. Tìm tất cả các giá trị m để phương trình sau có nghiệm

$$\sqrt{x^2+x+1} - \sqrt{x^2-x+1} = m$$

HD. Đặt f(x) = $\sqrt{x^2+x+1} - \sqrt{x^2-x+1}$, x $\in \mathbb{R}$.

Cách 1. f '(x) = $\dfrac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+1}} - \dfrac{2x-1}{\sqrt{x^2-x+1}}$

- $-\frac{1}{2} \le x \le \frac{1}{2} \Rightarrow 2x + 1 \ge 0, 2x - 1 \le 0 \Rightarrow f'(x) > 0$

• x > $\frac{1}{2}$: f '(x) > 0 $\Leftrightarrow \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+1}} > \frac{2x-1}{\sqrt{x^2-x+1}} > 0$

$\Leftrightarrow \frac{(2x+1)^2}{x^2+x+1} > \frac{(2x-1)^2}{x^2-x+1} \Leftrightarrow (2x+1)^2(x^2-x+1) > (2x-1)^2(x^2+x+1) \Leftrightarrow$ x > 0

Vậy x > $\frac{1}{2}$ $\Rightarrow$ f '(x) > 0

• x < - $\frac{1}{2}$: f '(x) > 0 $\Leftrightarrow 0 > \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+1}} > \frac{2x-1}{\sqrt{x^2-x+1}}$

$\Leftrightarrow \frac{(2x+1)^2}{x^2+x+1} < \frac{(2x-1)^2}{x^2-x+1} \Leftrightarrow (2x+1)^2(x^2-x+1) < (2x-1)^2(x^2+x+1) \Leftrightarrow$ x < 0

Vậy x < - $\frac{1}{2}$ $\Rightarrow$ f '(x) > 0

Mặt khác $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x}{\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2-x+1}} = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+|x|\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}$

$$= \begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}} = 1 \\ \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2x}{-\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}-\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}} = -1 \end{cases}$$ $\Rightarrow$ **Tập giá trị của f(x): (- 1; 1)**

Suy ra, phương trình có nghiệm khi chỉ khi - 1 < m < 1.

Cách 2. $|f(x)| = \frac{2|x|}{\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2-x+1}} = \frac{2|x|}{\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}+\sqrt{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}} =$

$= \frac{2|x|}{\left|x+\frac{1}{2}\right|+\left|x-\frac{1}{2}\right|} \le \frac{2|x|}{\left|x+\frac{1}{2}+x-\frac{1}{2}\right|} = \frac{|x|}{|x|} = 1 \Rightarrow |f(x)| \le 1$

Dấu đẳng thức ở (1) không xảy ra vì dấu đẳng thức ở (1) chỉ xảy ra khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} x = 0 & (1) \\ x = 0 \vee \left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right) \ge 0 & (2) \\ x \ne 0 & (3) \end{cases}$$: Hệ này vô nghiệm do (1) và (3).

Suy ra $|f(x)|$ < 1 $\Leftrightarrow$ - 1 < f(x) < 1.

Mặt khác: $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1 \\ \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -1 \end{cases}$ và f(x) liên tục trên $\mathbb{R}$ nên **Tập giá trị của f(x): (- 1; 1)**

VD2. Tìm tất cả các giá trị m để phương trình sau có nghiệm

$$\sqrt{3+x}+\sqrt{6-x}=m$$

HD. Đặt f(x) = $\sqrt{3+x}+\sqrt{6-x}$, x $\in[-3;6]$.

Cách 1. f '(x) = $\frac{2}{\sqrt{3+x}}-\frac{2}{\sqrt{6-x}}$, $\forall$ x $\in(-3;6)$.

f '(x) $\geq$ 0 $\Leftrightarrow$ x $\leq\frac{3}{2}$

f(-3) = 3, f(6) = 3, $f\left(\frac{3}{2}\right)$ = $3\sqrt{2}$, f(x) liên tục trên $[-3;6]$

$\Rightarrow \min\limits_{[-3;6]} f(x)=3, \max\limits_{[-3;6]} f(x)=3\sqrt{2}$

Cách 2. $f(x)\leq\sqrt{2(3+x+6-x)}=3\sqrt{2}$, dấu đẳng thức xảy ra khi chỉ khi $x=\frac{3}{2}$.

Mặt khác f(x) $\geq$ 0, x $\in[-3;6]$, $(f(x))^2=9+\sqrt{(x+3)(x-6)}\geq 9\Leftrightarrow f(x)\geq 3$, dấu đẳng thức xảy ra khi chỉ khi $x=\frac{3}{2}$. f(x) liên tục trên $[-3;6]$

Suy ra $\Rightarrow \min\limits_{[-3;6]} f(x)=3, \max\limits_{[-3;6]} f(x)=3\sqrt{2}$.

VD3. Tìm tất cả các giá trị m để phương trình sau có nghiệm

$$\sqrt{3+x}-\sqrt{6-x}=m$$

HD. f '(x) = $\frac{2}{\sqrt{3+x}}+\frac{2}{\sqrt{6-x}}$ > 0, $\forall$ x $\in[-3;6]$.

f(-3) = - 3, f(6) = 3, f(x) liên tục trên $[-3;6]\Rightarrow \min\limits_{[-3;6]} f(x)=-3, \max\limits_{[-3;6]} f(x)=3$

Suy ra, Pt đã cho có nghiệm khi và chỉ khi - 3 $\leq m\leq 3$.

VD4. Tìm tất cả các giá trị m để phương trình sau có nghiệm

$$\frac{\text{sinx + cosx}}{\text{2sinx + cosx + 3}} = \text{m}$$

HD. Đặt y = $\frac{\text{sinx + cosx}}{\text{2sinx + cosx + 3}}$

Với mọi x: 2sinx ≥ -2, cosx $\geq -1\Rightarrow 2\sin x+\cos x>-3$ (dấu đẳng thức không xảy ra vì sinx và cosx không đồng thời nhận giá trị - 1)

Suy ra $2\sin x+\cos x+3\neq 0,\forall x$ $\Rightarrow$ TXĐ: **R.**

Ta tìm tập giá trị của hàm số:

y là một giá trị thuộc tập giá trị $\Leftrightarrow$ phương trình y = $\frac{\text{sinx + cosx}}{\text{2sinx + cosx + 3}}$ có nghiệm.

Ptrình y = $\frac{\text{sinx + cosx}}{\text{2sinx + cosx + 3}}$ $\Leftrightarrow$ (2y - 1)sinx + (y - 1)cosx + 3y = 0

Ptrình này có nghiệm khi và chỉ khi $(2y - 1)^2 + (y - 1)^2 \geq 9y^2 \Leftrightarrow 2y^2 + 3y - 1\leq 0$

$\Leftrightarrow \frac{-3-\sqrt{17}}{4} \le y \le \frac{-3+\sqrt{17}}{4}$.

Suy ra, tập giá trị của y: $\left[\frac{-3-\sqrt{17}}{4}; \frac{-3+\sqrt{17}}{4}\right]$

Bài tập tương tự:

BT1. Tìm m để phương trình sau có nghiệm $\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2-x+1}=m$.

BT2. Tìm m để phương trình sau có nghiệm $\frac{2\cos^2 x+\sin 2x}{2\sin 2x+3\cos 2x-5}=m$.

VII. PHƯƠNG PHÁP TOẠ ĐỘ VÀ HÌNH HỌC

VD1. Cho hệ phương trình $\begin{cases} x^2+y^2=2(1+a) \\ (x+y)^2=4 \end{cases}$

1) Giải hệ khi a = 1.

2) Tìm tất cả các giá trị của a để hệ có đúng hai nghiệm.

HD. Cách 1. $\begin{cases} x^2+y^2=2(1+a) \\ (x+y)^2=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2=2(1+a) \\ (x+y-2)(x+y+2)=0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2+y^2=2(1+a) \\ x+y-2=0 \end{cases} \\ \begin{cases} x^2+y^2=2(1+a) \\ x+y+2=0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2+(2-x)^2=2(1+a) \\ y=2-x \end{cases} \\ \begin{cases} x^2+(2+x)^2=2(1+a) \\ y=-2-x \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2-2x+1-a=0 & (1) \\ y=2-x & (2) \end{cases} \\ \begin{cases} x^2+2x+1-a=0 & (3) \\ y=-2-x & (4) \end{cases} \end{array}\right.$$

1) a = 1: Hệ đã cho trở thành $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2-2x=0 \\ y=2-x \end{cases} \\ \begin{cases} x^2+2x=0 \\ y=-2-x \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=0 \vee x=2 \\ y=2-x \end{cases} \\ \begin{cases} x=0 \vee x=-2 \\ y=-2-x \end{cases} \end{array}\right.$

Suy ra 4 nghiệm (0; 2), (2; 0), (0; - 2), (- 2; 0).

2) Hệ có đúng hai nghiệm.

Nhận xét rằng (1) và (3) có cùng biệt số Δ' = a. Suy ra a ≥ 0

- a > 0: Mỗi phương trình (1) và (3) có 2 nghiệm phân biệt, trong khi từ (2) và (4) ta có 2 - x $\neq$ - 2 - x với $\forall$ x nên hệ có ít nhất 4 nghiệm. Suy ra a > 0 không thoả.

- a = 0: Hệ (1)&(2) có nghiệm (1; 1), hệ (3)&(4) có nhiệm (- 1; - 1). Vậy a = 0 thoả.

Cách 2 (PP Hình học).

Thấy ngay a ≥ 0. Trong hệ toạ độ Đê-các Oxy:

Xem Pt $x^2+y^2=2(1+a)$, a ≥ 0 là Pt đường tròn (O, R), R = $\sqrt{2(1+a)}$

Xem $(x + y)^2 = 4 \Leftrightarrow (x + y - 2)(x + y + 2) = 0$ là phương trình hai đường thẳng:

Δ_1: x + y - 2 = 0, Δ_2: x + y + 2 = 0

Hai đường thẳng này đối xứng nhau qua O.

Pt có đúng hai nghiệm $\Leftrightarrow$ Δ_1 tiếp xúc với (O, R)(do đó Δ_2 cũng tiếp xúc với (O, R))

$\Leftrightarrow$ d(O, Δ_1) = R $\Leftrightarrow$ $\dfrac{|0+0-2|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2(1+a)}$ $\Leftrightarrow$ a = 0.

VD2. Cho hệ phương trình $\begin{cases} x + ay - a = 0 \\ x^2 + y^2 - x = 0 \end{cases}$

1) Tìm tất cả các giá trị của a để hệ có hai nghiệm phân biệt.

2) Gọi hai nghiệm là $(x_1; y_1), (x_2; y_2)$ là hai nghiệm. Chứng minh rằng:

$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 \le 1$$

HD. 1) Trong hệ toạ độ Đê-các Oxy:

Xem phương trình x + ay - a = 0 là phương trình đường thẳng d.

Xem phương trình $x^2 + y^2 - x = 0$ là phương trình đường tròn I($\frac{1}{2}$; 0), R = $\frac{1}{2}$.

Hệ có hai nghiệm phân biệt khi chỉ khi đường thẳng cắt đường tròn tại hai điểm phân biệt

$$\Leftrightarrow d(I, d) < R \Leftrightarrow \frac{\left|\frac{1}{2} - a\right|}{\sqrt{1+a^2}} < \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sqrt{1+a^2} > |1-2a| \Leftrightarrow 1 + a^2 > 4a^2 - 4a + 1 \Leftrightarrow 0 < a < \frac{4}{3}$$

2) Gọi A, B là các giao điểm của đường tròn I($\frac{1}{2}$; 0) và đường thẳng d. Khi đó $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$. AB là một dây cung của đường tròn nên AB $\le$ 2R =1.

Để ý rằng AB = $(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$. Ta có đpcm.

VD3. Giải phương trình $\left|\sqrt{x^2 - 4x + 5} - \sqrt{x^2 - 10x + 50}\right| = 5$

HD. Ptrình tương đương $\left|\sqrt{(x-2)^2 + 1^2} - \sqrt{(x-5)^2 + 5^2}\right| = 5$ (1)

Trong hệ toạ độ Oxy, chọn M(x; 0), A(2; 1), B(5; 5).

(1) $\Leftrightarrow |AM - BM| = AB$ $\Leftrightarrow$ A, B, M thẳng hàng và M ở ngoài AB.

Mặt khác A, B ở về cùng phía đối với Ox. Suy ra M là giao điểm của đường thẳng AB, kí hiệu (AB), với Ox.

Phương trình (AB): $\dfrac{x-2}{5-2} = \dfrac{y-1}{5-1} \Leftrightarrow 4(x-2) = 3(y-1)$

Hoành độ giao điểm với Ox: y = 0 $\Rightarrow$ x = $\frac{5}{4}$.

VD4. Giải phương trình $\sqrt{2x^2 - 2x + 1} + \sqrt{2x^2 - (\sqrt{3}-1)x + 1} + \sqrt{2x^2 + (\sqrt{3}+1)x + 1} = 3$.

HD. Phương trình đã cho tương đương:

$$\sqrt{x^2+(x-1)^2}+\sqrt{\left(x-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(x+\frac{1}{2}\right)^2}+\sqrt{\left(x+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(x+\frac{1}{2}\right)^2}=3 \qquad (1)$$

Trong mặt phẳng Oxy, chọn A(0; 1), B($\frac{\sqrt{3}}{2}$; - $\frac{1}{2}$), C(-$\frac{\sqrt{3}}{2}$; - $\frac{1}{2}$).

Khi đó, (1) $\Leftrightarrow$ MA + MB + MC = 3 (2)

Thấy rằng tam giác ABC đều, tâm O và OA = OB = OC = 1

(1) suy ra MA + MB + MC = OA + OB + OC (2)

Ta biết rằng: Nếu tam giác ABC đều tâm O thì mọi điểm M thuộc mặt phẳng tam giác đều có MA + MB + MC $\geq$ OA + OB + OC. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi M $\equiv$ O.

Suy ra (2) $\Leftrightarrow$ M $\equiv$ O $\Leftrightarrow$ x = 0.

VD5. Giải phương trình $x\sqrt{x+1}+\sqrt{3-x}=2\sqrt{x+1}$.

HD. Đặt $\vec{u}=(x;1)$, $\vec{v}=(\sqrt{x+1};\sqrt{3-x})$.

Ta có: $\vec{u}.\vec{v} = x\sqrt{x+1}+\sqrt{3-x}$, $|\vec{u}|.|\vec{v}| = 2\sqrt{x+1}$

Phương trình đã cho tương đương với $\vec{u}.\vec{v}=|\vec{u}|.|\vec{v}| \Leftrightarrow \vec{u},\vec{v}$ cùng chiều.

$\vec{u},\vec{v}$ cùng phương $\Leftrightarrow \frac{x}{1}=\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{3-x}} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2(3-x)=x+1 \\ 0\leq x<3 \end{cases} \Leftrightarrow x=1 \vee x=1+\sqrt{2}$

VD6. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} \sqrt{1+x_1}+\sqrt{1+x_2}+...+\sqrt{1+x_{1980}}=1980\sqrt{\frac{1981}{1980}} \\ \sqrt{1-x_1}+\sqrt{1-x_2}+...+\sqrt{1-x_{1980}}=1980\sqrt{\frac{1979}{1980}} \end{cases}$$

HD.

Đặt $\overrightarrow{a_i}=\left(\sqrt{1+x_i};\sqrt{1-x_i}\right)_{\overline{i\,=\,1,\,1980}} \Rightarrow |\overrightarrow{a_i}|=\sqrt{2}$ (i = 1, 2, ..., 1980), $\sum_{i=1}^{1980}|\overrightarrow{a_i}|=1980\sqrt{2}$ (1)

Mặt khác $\sum_{i=1}^{1980}\overrightarrow{a_i}=\left(\sqrt{1+x_1}+...+\sqrt{1+x_{1980}};\sqrt{1-x_1}+...+\sqrt{1-x_{1980}}\right)$

$$\Rightarrow \left|\sum_{i=1}^{1980}\overrightarrow{a_i}\right|=\sqrt{\left(\sqrt{1+x_1}+...+\sqrt{1+x_{1980}}\right)^2+\left(\left(\sqrt{1-x_1}+...+\sqrt{1-x_{1980}}\right)^2\right)}=$$

$$=\sqrt{1980.1981+1980.1979}=1980\sqrt{2} \qquad (2)$$

Từ (1)&(2) suy ra các véc tơ $\overrightarrow{a_i}(i=\overline{1,1980})$ cùng phương, cùng hướng, cùng độ dài.

Như thế $x_1 = x_2 = ... x_{1980} \Rightarrow \sqrt{1+x_1}=\sqrt{1+x_2}=...=\sqrt{1+x_{1980}}=\sqrt{\frac{1981}{1980}}$

$\Rightarrow x_1 = x_2 = ... x_{1980} = \frac{1}{1980}$

IX. CÁC PHƯƠNG TRÌNH KHÁC.

VD1. Cho các số thực a, b, c và số nguyên dương m thoả:

$$\frac{a}{m+2}+\frac{b}{m+1}+\frac{c}{m}=0$$

Chứng minh rằng phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ (*) có nghiệm $x\in (0; 1)$.

HD. (Sử dụng định lý Lagrăng). Với hàm số f(x) xác định liên tục, khả vi trên [a; b] thì tồn tại c thuộc (a; b):

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Đặt $f(x) = \frac{a}{m+2}x^{m+2}+\frac{b}{m+1}x^{m+1}+\frac{c}{m}x^{m}$, $x\in [0; 1]$

$$f'(x) = ax^{m+1}+bx^{m}+cx^{m-1}$$

Tồn tại $x_0\in (0; 1)$: $f'(x_0) = ax_0^{m+1}+bx_0^{m}+cx_0^{m-1} = \frac{f(1)-f(0)}{1-0} =$

$$= \frac{a}{m+2}+\frac{b}{m+1}+\frac{c}{m}=0$$

$$ax_0^{m+1}+bx_0^{m}+cx_0^{m-1} = 0 \Leftrightarrow x_0^{m-1}(ax_0^2+bx_0+c)=0$$
$$\Leftrightarrow ax_0^2+bx_0+c=0$$

VD2. Cho a > - 6. Giải phương trình:

$$x^4-10x^3-2(a-1)x^2+2(5a+6)x+2a+a^2=0$$

HD. (Xem vế trái là tam thức bậc hai của tham số a)

$$a^2-2a(x^2-5x-1)+(x^4-10x^3+22x^2+12x)=0$$

$\Delta'=(x-1)^2\Rightarrow a=(x^2-5x-1)\pm(x-1)$

Suy ra hai nghiệm: $x^2 - 6x$ và $x^2 - 4x - 2$

Phương trình đã cho tương đương: $[a - (x^2 - 6x)][a - (x^2 - 4x - 2)] = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-6x-a=0 \\ x^2-4x-2-a=0 \end{array}\right.$$

Do a > - 6 $\Rightarrow \Delta_1'=9+a>0,\ \Delta_2'=6+a>0$. suy ra các nghiệm của pt đã cho:

$$x=3\pm\sqrt{a+9},\ x=2\pm\sqrt{a+6}$$

VD3. Cho hệ phương trình:

$$\begin{cases} ax^2+bx+c=y \\ ay^2+by+c=z \\ az^2+bz+c=x \end{cases}, \text{ trong đó } a\neq 0,\ (b-1)^2-4ac<0.$$

Chứng minh hệ phương trình trên vô nghiệm.

HD. (Chứng minh phản chứng)

Không mất tính tổng quát, giả sử a > 0.

Giả sử hệ có nghiệm (x_0, y_0, z_0). Khi đó:

$$\begin{cases} ax_0^2 + bx_0 + c = y_0 & (1) \\ ay_0^2 + by_0 + c = z_0 & (2) \\ az_0^2 + bz_0 + c = x_0 & (3) \end{cases}$$

Cộng từng vế (1)(2)(3) ta có:

$$\left[ax_0^2 + (b-1)x_0 + c\right] + \left[ay_0^2 + (b-1)y_0 + c\right] + \left[az_0^2 + (b-1)z_0 + c\right] = 0 \quad (4)$$

Đặt $f(t) = at^2 + (b-1)t + c$ thì (4) $\Leftrightarrow$ $f(x_0) + f(y_0) + f(z_0) = 0$ (5)

Do $a \neq 0,\ (b-1)^2 - 4ac < 0.$ $\Rightarrow$ $af(t) > 0,\ \forall t.$

Vì a > 0 nên $f(t) > 0,\ \forall t \Rightarrow f(x_0) > 0,\ f(y_0) > 0,\ f(z_0) > 0$. Trái với (5).

Vậy, hệ đã cho vô nghiệm.