PHƯƠNG TRÌNH VÀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH ĐẠI SỐ

I. PHƯƠNG TRÌNH ax + b = 0.

*** Các bước giải và biện luận:**

i) a = 0 = b : Mọi x là nghiệm

a = 0 $\neq$ b : Vô nghiệm

ii) a $\neq$ 0 : Phương trình gọi là phương trình bậc nhất, có nghiệm duy nhất: $x = -\dfrac{b}{a}$

*** Nhận xét:** Phương trình ax + b = 0 có hơn một nghiệm khi và chỉ khi mọi x là nghiệm, khi và chỉ khi a = b = 0.

*** Các phương trình chuyển về phương trình ax + b = 0 :**

1. Phương trình có ẩn ở mẫu:

PP Giải: Đặt ĐK mẫu thức khác không. Quy đồng, bỏ mẫu. Giải phương trình. Đối chiếu kết quả với điều kiện. Kết luận nghiệm.

VD1. Giải và biện luận phương trình:

$$\frac{x-2m}{2x-1} = \frac{2x+1}{4x-m}$$

HD. ĐK: $x \neq \dfrac{1}{2}, x \neq \dfrac{m}{4}$

$$\frac{x-2m}{2x-1} = \frac{2x+1}{4x-m} \Leftrightarrow 4x^2 - 9mx + 2m^2 = 4x^2 - 1 \Leftrightarrow 9mx = 2m^2 + 1 \quad (1)$$

i) m = 0: (1) vô nghiệm

ii) $m \neq 0$: $(1) \Leftrightarrow x = \dfrac{2m^2+1}{9m}$.

$x = \dfrac{2m^2+1}{9m}$ là nghiệm của phương trình đã cho

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{2m^2+1}{9m} \neq \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{2m^2+1}{9m} \neq \dfrac{m}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4m^2 + 2 \neq 9m \\ 8m^2 + 4 \neq 9m^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4m^2 - 9m + 2 \neq 0 \\ m^2 \neq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 2, m \neq \dfrac{1}{4} \\ m \neq \pm 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq \dfrac{1}{4} \\ m \neq \pm 2 \end{cases}$$

KL: • $\begin{cases} m \neq 0, m \neq \dfrac{1}{4} \\ m \neq \pm 2 \end{cases}$: $x = \dfrac{2m^2+1}{9m}$

• $m = 0 \vee m = \dfrac{1}{4} \vee m = \pm 2$: Vô nghiệm.

VD2. Giải và biện luận phương trình:

$$\frac{a}{ax-1} + \frac{b}{bx-1} = \frac{a+b}{(a+b)x-1}$$

HD. ĐK: $\begin{cases} ax-1 \neq 0 \\ bx-1 \neq 0 \\ (a+b)x-1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ax \neq 1 & (1) \\ bx \neq 1 & (2) \\ (a+b)x \neq 1 & (3) \end{cases}$

Phương trình tương đương:

$\Leftrightarrow \dfrac{2abx-(a+b)}{abx^2-(a+b)x+1} = \dfrac{a+b}{(a+b)x-1}$

$\Leftrightarrow 2ab(a+b)x^2-(a+b)^2x-2abx+(a+b) = ab(a+b)x^2-(a+b)^2x+(a+b)$

$\Leftrightarrow ab(a+b)x^2-2abx = 0 \Leftrightarrow x\left[ab(a+b)x-2ab\right] = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x = 0 & (4) \\ ab(a+b)x-2ab = 0 & (5) \end{array}\right.$

i) (4) cho x = 0 là nghiệm với mọi a, b.

ii) Giải (5):

+ a = 0: $\forall$ x là nghiệm của (5).

b = 0: $\forall$ x là nghiệm của phương trình đã cho.

$b \neq 0$: $\forall x \neq \dfrac{1}{b}$ của phương trình đã cho.

+ b = 0: $\forall$ x là nghiệm của (5).

a = 0: $\forall$ x là nghiệm của phương trình đã cho.

$a \neq 0$: $\forall x \neq \dfrac{1}{a}$ của phương trình đã cho.

+ a = - b: (5) $\Leftrightarrow$ 0x + 2b^2 = 0.

b = 0: $\forall$ x là nghiệm của phương trình đã cho.

$b \neq 0$: (5) vô nghiệm. Phương trình đã cho có nghiệm x = 0.

+ $a \neq 0 \wedge b \neq 0 \wedge a \neq -b$: (5) $\Leftrightarrow x = \dfrac{2}{a+b}$.

$x = \dfrac{2}{a+b}$ là nghiệm của phương trình đã cho khi chỉ khi:

$$\begin{cases} \dfrac{2}{a+b} \neq \dfrac{1}{a} \\ \dfrac{2}{a+b} \neq \dfrac{1}{b} \\ \dfrac{2}{a+b} \neq \dfrac{1}{a+b} \end{cases} \Leftrightarrow a \neq b.$$

KL.
- a = b = 0: $\forall$ x
- a = 0 $\neq$ b: $\forall x \neq \dfrac{1}{b}$
- b = 0 $\neq$ a: $\forall x \neq \dfrac{1}{a}$

- a $\neq 0$, a $\neq 0$, a $\neq$ b, a $\neq$ - b: $x = \dfrac{2}{a+b}$
- a $\neq 0$, a $\neq 0$, a = b, a = - b: x = 0

*** Bài tập luyện tập.**

Bài 1. Giải và biện luận theo m phương trình : $\dfrac{(m-1)x}{x+3} - \dfrac{(m-1)x+1}{x-m} = 0$

Bài 2. Giải và biện luận theo a, b phương trình : $\dfrac{ax+b}{x-a} = \dfrac{x-b}{x+a}$

Bài 3. Giải và biện luận theo a, b phương trình : $\dfrac{a}{x-b} = \dfrac{b}{x-a}$

Bài 4. Giải và biện luận theo a, b phương trình : $\dfrac{ax-1}{x-1} + \dfrac{b}{x+1} = \dfrac{a(x^2+1)}{x^2-1}$

Bài 5. Giải và biện luận theo a, b phương trình :

$$\frac{x-a}{x-a-1} - \frac{x-a-1}{x-a-2} = \frac{x-b}{x-b-1} - \frac{x-b-1}{x-b-2}$$

Bài 6. Giải và biện luận theo a, b phương trình : $\dfrac{a-x}{a+x} + \dfrac{b-x}{b+x} = \dfrac{a+x}{a-x} + \dfrac{b+x}{b-x}$.

2. Phương trình có giá trị tuyệt đối.

Dạng 1. $|f(x)| = |g(x)|$

PP Giải: Phương trình tương đương $\left[\begin{array}{l} f(x) = g(x) \\ f(x) = -g(x) \end{array}\right.$

Dạng 2. $|f(x)| = g(x)$

PP Giải:

Cách 1: Phương trình tương đương $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) = g(x) \\ g(x) \geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) = -g(x) \\ g(x) \geq 0 \end{cases} \end{array}\right.$

Cách 2: Phương trình tương đương $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) = g(x) \\ f(x) \geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} -f(x) = g(x) \\ f(x) \leq 0 \end{cases} \end{array}\right.$

Vấn đề là ở chỗ, ở cách 1, ta phải giải bất phương trình $g(x) \geq 0$; ở cách 2, ta phải giải bất phương trình $f(x) \geq 0$. Tuỳ thuộc vào bậc của f(x) hay g(x) để lựa chọn thích hợp.

Dạng 3. Nhiều giá trị tuyệt đối.

Ta phá giá trị tuyệt đối theo định nghĩa, và giải phương trình trên từng tập con.

VD. Giải phương trình $|2x-1|+|3-x|-2|2x+3|=10$

HD. $2x-1=0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{2};\ 3-x=0 \Leftrightarrow x=3;\ 2x+3=0 \Leftrightarrow x=-\frac{3}{2}$

	$-\frac{3}{2}$		$\frac{1}{2}$	3
$\vert 2x-1\vert$	1 - 2x	1 - 2x	2x - 1	2x - 1
$\vert 3-x\vert$	3 - x	3 - x	3 - x	x - 3
$2\vert 2x+3\vert$	- 4x - 6	4x + 6	4x + 6	4x + 6
VT	x + 10	- 7x - 2	- 3x - 4	- x - 10

i) $x \le -\frac{3}{2}$: x + 10 = 1 $\Leftrightarrow$ x = - 9 : Thoả

ii) $-\frac{3}{2} < x < \frac{1}{2}$: - 7x - 2 = 1 $\Leftrightarrow$ x = $-\frac{3}{7}$: Thoả

3i) $\frac{1}{2} \le x \le 3$: - 3x - 4 = 1 $\Leftrightarrow$ x = $-\frac{5}{3}$: Không thoả

4i) $x > 3$: - x - 10 = 1 $\Leftrightarrow$ x = - 11: Không thoả

3. Phương trình có căn thức.

Dạng 1. $\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)}$

Biến đổi tương đương $\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x) \\ f(x) \ge 0 \text{ (hay g(x) } \ge 0) \end{cases}$ ("hay" ở đây có nghĩa là sự thay thế, lựa chọn một trong hai, lựa chọn bất phương trình đơn giản hơn)

Dạng 2. $\sqrt{f(x)} = g(x)$

Biến đổi tương đương $\sqrt{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g^2(x) \\ g(x) \ge 0 \end{cases}$

Dạng 3. Nhiều căn thức không thuộc các dạng trên.

- Bình phương hai vế nhiều lần theo nguyên tắc:

$$A \ge 0, B \ge 0 : A \ge B \Leftrightarrow A^2 \ge B^2$$
$$A \le 0, B \le 0 : A \ge B \Leftrightarrow A^2 \le B^2$$

📖 *Ngoài phương pháp biến đổi tương đương nói trên, các phương trình chuyển về bậc nhất có thể giải bằng cách biến đổi về tích,đặt ẩn phụ hay sử dụng các phương pháp khác (Xem **Phương trình không mẫu mực**)*

VD. Giải phương trình: $x + \sqrt{\sqrt{x}+1} = 1$ **(XBang)**

HD. Cách 1(Biến đổi tương đương):

$$x + \sqrt{\sqrt{x}+1} = 1 \Leftrightarrow \sqrt{\sqrt{x}+1} = 1 - x$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x}+1=(1-x)^2 \\ 1-x\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x}+1=1-2x+x^2 \\ 1-x\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x}\left(1+2\sqrt{x}-x\sqrt{x}\right)=0 \\ x\le 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ \begin{cases} 1+2\sqrt{x}-x\sqrt{x}=0 \\ x\le 1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ \begin{cases} \sqrt{x}=-1, \sqrt{x}=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2} \\ 0\le x\le 1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow x=0$$

Cách 2(Biến đổi tương đương):

$$x+\sqrt{\sqrt{x}+1}=1 \Leftrightarrow x+\sqrt{x}+\frac{1}{4}=\sqrt{x}+1-\sqrt{\sqrt{x}+1}+\frac{1}{4} \Leftrightarrow \left(\sqrt{x}+\frac{1}{2}\right)^2=\left(\sqrt{\sqrt{x}+1}-\frac{1}{4}\right)^2$$

Cách 3(Biến đổi về dạng tích):

$$x+\sqrt{\sqrt{x}+1}=1 \Leftrightarrow x-(\sqrt{x}+1)+\sqrt{x}+\sqrt{\sqrt{x}+1}=0 \Leftrightarrow \left(\sqrt{x}+\sqrt{\sqrt{x}+1}\right)\left(\sqrt{x}-\sqrt{\sqrt{x}+1}+1\right)=0$$

Cách 4(Đặt ẩn phụ):

Đặt $\sqrt{y}=\sqrt{\sqrt{x}+1} \Rightarrow \begin{cases} y=\sqrt{x}+1 \\ x=1-\sqrt{y} \end{cases} \Rightarrow y-x=\sqrt{x}+\sqrt{y} \Leftrightarrow \left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)\left(\sqrt{y}-\sqrt{x}-1\right)=0$

II. PHƯƠNG TRÌNH $ax^2 + bx + c = 0$.

1. Các bước giải và biện luận.

i) a = 0: Phương trình trở thành: **bx + c = 0**

b = 0 = c : Mọi x là nghiệm

b = 0 $\neq$ c : Vô nghiệm

b $\neq 0$: Phương trình trở thành phương trình bậc nhất, có nghiệm duy nhất: $x=-\dfrac{c}{b}$

ii) a $\neq$ 0: Phương trình đã cho gọi là phương trình bậc hai.

$$\Delta=b^2-4ac,\ \Delta'=\left(\frac{1}{2}b\right)^2-ac$$

- $\Delta < 0$ ($\Delta' < 0$): Phương trình vô nghiệm.
- $\Delta = 0$ ($\Delta' = 0$): Phương trình có hai nghiệm bằng nhau $x=-\dfrac{b}{2a}$
- $\Delta > 0$ ($\Delta' > 0$): Phương trình có hai nghiệm phân biệt:

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{\left(-\frac{1}{2}b\right)\pm\sqrt{\Delta'}}{a}$$

*** Nhận xét:** Phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ có hơn hai nghiệm khi và chỉ khi mọi x là nghiệm, khi và chỉ khi a = b = c = 0.

2. Dấu các nghiệm của phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ ($a\neq 0$).

Đặt P = $\frac{c}{a}$, S = $-\frac{b}{a}$

- P < 0: Phương trình có hai nghiệm $x_1 < 0 < x_2$
- $\begin{cases} \Delta \ge 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0 < x_1 \le x_2 \\ \quad x_1 \le x_2 < 0 \end{array}\right.$
- $0 < x_1 \le x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \ge 0 \\ P > 0 \\ S > 0 \end{cases}$,
- $x_1 \le x_2 < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \ge 0 \\ P > 0 \\ S < 0 \end{cases}$

***** Chú ý:**

i) P = 0 $\Leftrightarrow x_1 = 0, x_2 = S$

ii) $\begin{cases} P < 0 \\ S > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 < 0 < x_2 \\ |x_1| < x_2 \end{cases}$; $\begin{cases} P < 0 \\ S < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 < 0 < x_2 \\ |x_1| > x_2 \end{cases}$

3i) $\begin{cases} S = 0 \\ \Delta \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow x_1 = -x_2$

4i) Các dấu hiệu cần, nhiều khi rất cần cho việc xét dấu các nghiệm:

- S < 0 : Nếu phương trình có nghiệm thì có ít nhất một nghiệm âm.
- S > 0 : Nếu phương trình có nghiệm thì có ít nhất một nghiệm dương

VD. Tìm tất cả các giá trị m sao cho phương trình sau có không ít hơn 2 nghiệm âm phân biệt: $x^4 + mx^3 + x^2 + mx + 1 = 0$.

HD. Thấy ngay x = 0 không thoả phương trình.

Chia hai vế của phương trình cho $x^2 \ne 0$:

$$x^2 + mx + 1 + m\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} + m\left(x + \frac{1}{x}\right) + 1 = 0 \qquad (1)$$

Đặt $x + \frac{1}{x} = X \Rightarrow x^2 - Xx + 1 = 0$ (2)

$\Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = X^2 - 2, |X| \ge 2$

(1) trở thành $X^2 + mX - 1 = 0$ (3)

(3) có hai nghiệm trái dấu với mọi m.

Với $|X| \ge 2$ thì (2) có hai nghiệm cùng dấu, nên để có nghiệm âm thì X < 0

Suy ra X < -2.

Tóm lại phương trình (3) phải có hai nghiệm $X_1 < -2 < 0 < X_2$

Nếu được dùng định lý đảo về dấu của tam thức bậc hai thì cần và đủ là:

$$\begin{cases} f(-2) < 0 \\ f(X) = X^2 + mX - 1 \end{cases} \Leftrightarrow 3 - 2m < 0 \Leftrightarrow m > \frac{3}{2}$$

Nhưng chương trình hiện hành không có định lý đảo về dấu của tam thức bậc hai, nên:

Cách 1: Đặt X + 2 = Y $\Rightarrow$ Y < 0:

$$X^2 + mX - 1 = 0 \Leftrightarrow (Y-2)^2 + m(Y-2) - 1 = 0 \Leftrightarrow Y^2 + (m-4)Y + 3 - 2m = 0$$

Phương trình này có hai nghiệm trái dấu chỉ khi 3 - 2m < 0 $\Leftrightarrow$ m > $\frac{3}{2}$.

Cách 2: $X^2 + mX - 1 = 0 \Leftrightarrow m = \dfrac{1 - X^2}{X}$

Đặt $f(X) = \dfrac{1-X^2}{X} \Rightarrow f'(X) = \dfrac{-2X^2 - 1 + X^2}{X^2} = \dfrac{-X^2 - 1}{X^2} < 0, \forall X \neq 0$.

x	$-\infty$ $\qquad$ -2		2 $\qquad$ $+\infty$
f '(X)	-		-
f(X)	$+\infty \searrow \frac{3}{2}$		$-\frac{3}{2} \searrow -\infty$

Thấy ngay phương trình có nghiệm X < - 2 khi chỉ khi m > $\frac{3}{2}$.

3. So sánh nghiệm của phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) với một số thực khác không.

3.1. Nếu dùng định lý đảo về dấu của tam thức bậc hai.

Đặt **$f(x) = ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$)**

$$\mathrm{af}(\alpha) < 0 \Leftrightarrow x_1 < 0 < x_2$$

$$\begin{cases} \mathrm{af}(\alpha) > 0 \\ \Delta \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \alpha < x_1 \leq x_2 \\ \quad x_1 \leq x_2 < \alpha \end{array}\right.$$

$$\begin{cases} \mathrm{af}(\alpha) > 0 \\ \Delta \geq 0 \\ \dfrac{S}{2} > \alpha \end{cases} \Leftrightarrow \alpha < x_1 \leq x_2; \qquad \begin{cases} \mathrm{af}(\alpha) > 0 \\ \Delta \geq 0 \\ \dfrac{S}{2} < \alpha \end{cases} \Leftrightarrow x_1 \leq x_2 < \alpha$$

*****Một số điều kiện cần và đủ về nghiệm của**

$f(x) = ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$)

3.1.1. f(x) có nghiệm thuộc $[\alpha; \beta]$:

Cần và đủ để f(x) có đúng 1 nghiệm thuộc $[\alpha; \beta]$ là một trong 4 điều kiện:

$\bullet f(\alpha)f(\beta) < 0$ $\quad\bullet\begin{cases} f(\alpha) = 0 \\ S - \alpha \notin [\alpha;\beta] \end{cases}$ $\quad\bullet\begin{cases} f(\beta) = 0 \\ S - \beta \notin [\alpha;\beta] \end{cases}$ $\quad\bullet\begin{cases} \Delta = 0 \\ -\dfrac{b}{2a} \in [\alpha;\beta] \end{cases}$

Cần và đủ để
f(x) có đúng 2 nghiệm thuộc $[\alpha;\beta]$: $\bullet\begin{cases} \Delta > 0 \\ af(\alpha) \geq 0 \\ af(\beta) \geq 0 \\ \alpha < \dfrac{S}{2} < \beta \end{cases}$

Nếu không cần phải tách bạch như thế
thì cần và đủ để f(x) có nghiệm thuộc $[\alpha;\beta]$: $\left[\begin{array}{l} \bullet f(\alpha)f(\beta) \leq 0 \\ \bullet\begin{cases} \Delta \geq 0 \\ af(\alpha) \geq 0 \\ af(\beta) \geq 0 \\ \alpha \leq \dfrac{S}{2} \leq \beta \end{cases} \end{array}\right.$

3.1.2. f(x) có nghiệm thuộc $(\alpha;\beta)$:

Cần và đủ để f(x) có đúng 1 nghiệm thuộc $(\alpha;\beta)$ là một trong bốn điều kiện:

$\bullet f(\alpha)f(\beta) < 0$ $\quad\bullet\begin{cases} f(\alpha) = 0 \\ S - \alpha \in (\alpha;\beta) \end{cases}$ $\quad\bullet\begin{cases} f(\beta) = 0 \\ S - \beta \in (\alpha;\beta) \end{cases}$ $\quad\bullet\begin{cases} \Delta = 0 \\ -\dfrac{b}{2a} \in (\alpha;\beta) \end{cases}$

Cần và đủ để
f(x) có đúng 2 nghiệm thuộc $(\alpha;\beta)$ là : $\bullet\begin{cases} \Delta > 0 \\ af(\alpha) > 0 \\ af(\beta) > 0 \\ \alpha < \dfrac{S}{2} < \beta \end{cases}$

3.1.3. f(x) có nghiệm thuộc $(\alpha;+\infty)$:

Cần và đủ để f(x) có đúng 1 nghiệm thuộc $(\alpha;+\infty)$ là một trong ba điều kiện:

$\bullet\ af(\alpha) < 0$ $\quad\bullet\begin{cases} f(\alpha) = 0 \\ S - \alpha > \alpha \end{cases}$ $\quad\bullet\begin{cases} \Delta = 0 \\ -\dfrac{b}{2a} > \alpha \end{cases}$

Cần và đủ để f(x) có đúng 2 nghiệm thuộc $(\alpha;+\infty)$: $\bullet\begin{cases}\Delta > 0\\ af(\alpha) > 0\\ \alpha < \frac{S}{2} < \beta\end{cases}$

3.1.4. f(x) có nghiệm thuộc $[\alpha;+\infty)$:

Cần và đủ để f(x) có đúng 1 nghiệm thuộc $[\alpha;+\infty)$ là một trong ba điều kiện:

$\bullet\ af(\alpha) < 0$ $\bullet\begin{cases}f(\alpha) = 0\\ S-\alpha < \alpha\end{cases}$ $\bullet\begin{cases}\Delta = 0\\ -\frac{b}{2a} \geq \alpha\end{cases}$

Cần và đủ để f(x) có đúng 2 nghiệm thuộc $[\alpha;+\infty)$: $\bullet\begin{cases}\Delta > 0\\ af(\alpha) \geq 0\\ \alpha < \frac{S}{2} < \beta\end{cases}$

3.1.5. f(x) có nghiệm thuộc $(-\infty;\alpha)$:

Cần và đủ để f(x) có đúng 1 nghiệm thuộc $(-\infty;\alpha)$ là một trong ba điều kiện:

$\bullet\ af(\alpha) < 0$ $\bullet\begin{cases}f(\alpha) = 0\\ S-\alpha < \alpha\end{cases}$ $\bullet\begin{cases}\Delta = 0\\ -\frac{b}{2a} < \alpha\end{cases}$

Cần và đủ để f(x) có đúng 2 nghiệm thuộc $(-\infty;\alpha)$: $\bullet\begin{cases}\Delta > 0\\ af(\alpha) > 0\\ \frac{S}{2} < \alpha\end{cases}$

3.1.6. f(x) có nghiệm thuộc $(-\infty;\alpha]$:

Cần và đủ để f(x) có đúng 1 nghiệm thuộc $(-\infty;\alpha]$ là một trong ba điều kiện:

$\bullet\ af(\alpha) < 0$ $\bullet\begin{cases}f(\alpha) = 0\\ S-\alpha > \alpha\end{cases}$ $\bullet\begin{cases}\Delta = 0\\ -\frac{b}{2a} \leq \alpha\end{cases}$

Cần và đủ để f(x) có đúng 2 nghiệm thuộc $(-\infty;\alpha]$: $\bullet\begin{cases}\Delta > 0\\ af(\alpha) \geq 0\\ \frac{S}{2} < \alpha\end{cases}$

3.2. Nếu không dùng định lý đảo về dấu của tam thức bậc hai.

• **Phương pháp tốt nhất là khảo sát sự biến thiên của hàm số (xem VD ở phần trên)**

• **Nếu chỉ so sánh nghiệm với một số thực α khác không thì có thể đặt y = x - α.**

VD. Tìm a để phương trình sau có hơn 1 nghiệm thuộc $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$:

$$(1-a)\tan^2 x-\frac{2}{\cos x}+1+3a=0$$

HD. $(1-a)\tan^2 x-\frac{2}{\cos x}+1+3a=0 \Leftrightarrow (1-a)\left(\frac{1}{\cos^2 x}-1\right)-\frac{2}{\cos x}+1+3a=0$

$\Leftrightarrow (1-a)\frac{1}{\cos^2 x}-\frac{2}{\cos x}+4a=0 \quad (1)$

Đặt $\frac{1}{\cos x}=X \Rightarrow X\in(1;+\infty)$

(1) $\Leftrightarrow \ (1-a)X^2-2X+4a=0 \qquad (2)$

Phương trình đã cho có hơn một nghiệm thuộc $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ $\Leftrightarrow$ phương trình (2) có hai nghiệm $X\in(1;+\infty)$.

Cách 1. Đặt X - 1 = Y > 0 :

(2) trở thành $(1-a)(Y+1)^2-2(Y+1)+4a=0 \Leftrightarrow (1-a)Y^2-2aY+3a-1=0 \quad (3)$

(3) có hai nghiệm dương $\Leftrightarrow \begin{cases}1-a\neq 0\\ \Delta'>0\\ P>0\\ S>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a\neq 1\\ 4a^2-4a+1>0\\ 3a-1>0\\ \frac{2a}{1-a}>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a\neq \frac{1}{2}\\ \frac{1}{3}<a<1\end{cases}$

Cách 2. Không phải khi nào cũng có thể nhận ra X = 2 là một nghiệm của (2). Nhưng nếu nhận ra được thì:

Với $a\neq 1$ thì nghiệm kia là $\frac{2}{1-a}-2=\frac{2a}{1-a}$.

Ta phải có $\begin{cases}\frac{2a}{1-a}>1\\ \frac{2a}{1-a}\neq 2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\frac{3a-1}{1-a}>0\\ 2a\neq 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\frac{1}{3}<a<1\\ a\neq\frac{1}{2}\end{cases}$

• **Có thể dùng phương pháp phần bù**: Tìm các giá trị tham số để phương trình có nghiệm thì ta tìm các giá trị làm cho phương trình vô nghiệm.

VD. Tìm tất cả các giá trị m để phương trình sau có nghiệm:

$$x^4+4x^3+2mx^2+4x+1=0$$

HD. Phương trình đã cho tương đương với :

$$\begin{cases} X^2+4X+2m-2=0 & (1) \\ x^2-Xx+1=0 & (2) \\ |X|\ge 2 & (3) \end{cases}$$

Phương trình đã cho có nghiệm khi và chỉ khi phương trình (1) có nghiệm thoả (3)
Ta tìm tất cả các giá trị m để phương trình (1) không có nghiệm thoả (3).
Điều này chỉ khi phương trình (1) vô nghiệm hoặc có hai nghiệm thuộc (- 2 ; 2)

i) Phương trình (1) vô nghiệm $\Leftrightarrow 4-2m+2<0 \Leftrightarrow m>3$

ii) Phương trình (1) có hai nghiệm thuộc (- 2 ; 2). Trường hợp này không xảy ra vì $-\dfrac{b}{2a}$= - 2 không thuộc khoảng (- 2 ; 2). Suy luận này khá hay: Nếu hai nghiệm thuộc khoảng (- 2 ; 2) thì $-\dfrac{b}{2a}$= - 2 thuộc khoảng (- 2 ; 2).Vô lý.

Bỏ những m > 3 ta còn tất cả các giá trị cần tìm là $m \le 3$.

***** *Bạn nên luôn luôn hướng tới việc dùng đạo hàm để khảo sát phương trình nếu có thể thì bạn sẽ tránh được nhiều rắc rối.*

📖 *Các phương trình **chuyển về bậc hai, tương tự** như đã nói về các phương trình chuyển về bậc nhất.*

VD. Giải phương trình $x^2+\sqrt{x+7}=7$

HD. Cách 1(Biến đổi tương đương)

$$x^2+\sqrt{x+7}=7 \Leftrightarrow x^2+x+\frac{1}{4}=x+7-\sqrt{x+7}+\frac{1}{4} \Leftrightarrow \left(x+\frac{1}{2}\right)^2=\left(\sqrt{x+7}-\frac{1}{2}\right)^2$$

Cách 2(Biến đổi về dạng tích)

$$x^2+\sqrt{x+7}=7 \Leftrightarrow x^2-(x+7)+(x+\sqrt{x+7})=0 \Leftrightarrow (x+\sqrt{x+7})(x-\sqrt{x+7}+1)=0$$

Cách 3(Đặt ẩn phụ, đưa về hệ phương trình)

Đặt $y=\sqrt{x+7} \Rightarrow \begin{cases} y^2=x+7 \\ x^2=7-y \end{cases} \Rightarrow y^2-x^2=x+y \Leftrightarrow (x+y)(y-x-1)=0$

*** Bài tập luyện tập.**

Bài 1. Cho phương trình $\text{a}x^2+bx+c=0$ có hai nghiệm x_1, x_2.
Đặt $S=x_1^n+x_2^n$. Chứng minh: $a\text{S}_\text{n}+bS_{n-1}+cS_{n--2}=0, (n\ge 3)$

Bài 2. Cho phương trình $x^2+2mx+4=0$.

a) Tìm m để phương trình có hai nghiệm không âm x_1, x_2. Khi đó tính theo m:

$$M=\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2},\ \ \text{N}=\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2}$$

b) Tìm m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 sao cho: $x_1^4+x_2^4\le 32$

Bài 3. Tìm nghiệm (x; y) sao cho y lớn nh ất: $x^2 - yx^2 - y + 8x + 7 = 0$

Bài 4. Biết rằng phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ có đúng một nghiệm dương (gọi là x_1).

Chứng minh rằng phương trình $cx^2 + bx + a = 0$ có đúng một nghiệm dương (gọi là x_2), đồng thời : $x_1 + x_2 \geq 2$.

Bài 5. Gọi x_0 là nghiệm của phương trình $ax^2 + bx + c = 0$. Chứng minh:

$$|x_0| < 1 + \max\left\{\left|\frac{b}{a}\right|; \left|\frac{c}{a}\right|\right\}, a \neq 0.$$

Bài 6. Cho phương trình $(1-a)\tan^2 x - \dfrac{2}{\cos x} + 1 + 3a = 0$

a) Giải phương trình khi a = $\dfrac{1}{2}$.

b) Tìm tất cả các giá trị a để phương trình có hơn một nghiệm thuộc khoảng $\left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$

Bài 7. Tìm tất cả các giá trị m để phương trình sau có nghiệm:

$$(x^2 - 1)(x + 5)(x + 3) - m = 0$$

Bài 8. Tìm tất cả các giá trị m để phương trình sau có nghiệm:

$$|x - 1|(x - 2) + m = 0$$

Bài 9. Tìm tất cả các giá trị p để phương trình sau có nghiệm:

$$\frac{4x^2}{1 + 2x^2 + x^4} + \frac{2px}{1 + x^2} + 1 - p^2 = 0$$

Bài 10. Giải và biện luận theo m phương trình:

$$|x^2 + x + m| = -x^2 + x + 2$$

Bài 11. Tìm tất cả các giá trị m để phương trình sau có nghiệm duy nhất:

$$\frac{\lg mx}{\lg(x + 1)} = 2$$

Bài 12. Tìm tất cả các giá trị m để phương trình sau có nghiệm:

$$(x + 2)^4 + x^4 = m$$

Giải phương trình khi m = 82.

Bài 13. Tìm tất cả các giá trị m để phương trình sau có nghiệm:

$$2x^4 - 3x^3 + mx^2 - 3x + 2 = 0$$

III. PHƯƠNG TRÌNH ax + by + c = 0.

a = b = c = 0: Mọi (x; y) là nghiệm.

a = b = 0 $\neq$ c: Vô nghiệm.

a = 0, b $\neq$ 0: x tuỳ ý; y = $-\dfrac{c}{b}$

a $\neq$ 0, b = 0: x = - $\frac{c}{a}$, y tuỳ ý.

a $\neq$ 0, b $\neq$ 0: x tuỳ ý, $y = -\frac{\text{ax}}{\text{b}} - \frac{c}{b}$ (hay $x = -\frac{\text{by}}{\text{a}} - \frac{c}{a}$, y tuỳ ý)

IV. HỆ PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN.

Dạng $\begin{cases} \text{ax + by = c} \\ \text{a'x + b'y = c'} \end{cases}$

Phương pháp giải:

1. Phương pháp thế.

2. Phương pháp cộng đại số.

3. Dùng máy tính bỏ túi.

4. Phương pháp định thức Crame.

VD. Giải và biện luận theo m hệ phương trình: $\begin{cases} (m-1)x + y = m \\ mx + (m-1)y = m \end{cases}$

HD.

$D = \begin{vmatrix} m-1 & 1 \\ 1 & \text{m-1} \end{vmatrix} = m^2 - 2m;\ D_x = \begin{vmatrix} m & 1 \\ \text{m} & \text{m-1} \end{vmatrix} = m^2 - 2m;\ D_y = \begin{vmatrix} m-1 & \text{m} \\ 1 & \text{m} \end{vmatrix} = m^2 - 2m$

i) $D \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 0 \wedge m \neq 2 : x = y = 1$

ii) m = 0: $D = D_x = D_y = 0 \Rightarrow$ Hệ tương đương với một phương trình: x - y = 0

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = t \\ y = t; t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

iii) m = 2: $D = D_x = D_y = 0 \Rightarrow$ Hệ tương đương với một phương trình:

x + y +2 = 0

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = t \\ y = -2 - t; t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

*** Bài tập luyện tập.**

Bài 1. Cho hệ phương trình:

$$\begin{cases} mx + 4y = m^2 + 4 \\ x + (m+3)y = 2m + 3 \end{cases}$$

a) Với giá trị nào của m rthì hệ có nghiệm duy nhất và nghiệm đó thoả $x \geq y$.

b) Với m tìm được ở a), tìm min(x + y).

Bài 2. Cho hệ phương trình:

$$\begin{cases} ax + y = 1 - a \\ x + ay = 1 - a^2 \end{cases}$$

Với giá trị nào của a rthì hệ có nghiệm (x ; y) thoả 2x + y > 0.

Bài 3. Tìm b sao cho với mọi a hệ sau có nghiệm:

$$\begin{cases} x + 2ay = b \\ ax + (1-a)y = b^2 \end{cases}$$

Bài 4. Cho hệ phương trình:

$$\begin{cases} (2a-1)x - y = 1 \\ x + (1+a)y = -1 \end{cases}$$

Giải hệ khi a =0, a = - $\frac{1}{2}$.

Bài 5. Giải và biện luận theo a, b hệ phương trình:

$$\begin{cases} (a+b)x + (a-b)y = a \\ (2a-b)x + (2a+b)y = b \end{cases}$$

Bài 6. Giải và biện luận theo a hệ phương trình:

$$\begin{cases} 6ax + (2-a)y = 3 \\ (a-1)x - ay = 2 \end{cases}$$

Gọi (x; y) là nghiệm. Tìm hệ thức liên hệ x, y không phụ thuộc a.

Bài 7. Cho hệ phương trình:

$$\begin{cases} ax + y = b \\ x + ay = c^2 + c \end{cases}$$

a) Với b = 0, giải và biện luận hệ theo a và c.

b) Tìm b sao cho với mọi a, luôn tìm được c để hệ có nghiệm.

Bài 8. Biết rằng hệ phương trình sau có nghiệm:

$$\begin{cases} ax + by = c \\ bx + cy = a \\ cx + ay = b \end{cases}$$

Chứng minh $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$.

V. HỆ PHƯƠNG TRÌNH BẬC CAO.

1. Hệ có một phương trình bậc nhất.

Phương pháp: PP thế (Rút x hoặc y từ phương trình bậc nhất thay vào phương trình bậc hai)

VD. Cho hệ phương trình

$$\begin{cases} x^3 - y^3 = m(x-y) \\ x + y = 1 \end{cases}$$

1) Giải hệ khi m = 3.

2) Tìm m để hệ có 3 nghiệm $(x_1; y_1)$, $(x_2; y_2)$, $(x_3; y_3)$sao cho $x_1; x_2; x_3$ lập thành một cấp số cộng.

HD. Hệ đã cho tương đương:

$$\begin{cases} (x - y(x^2 + y^2 + xy) = m(x-y) \\ x + y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x - y(x^2 + y^2 + xy - m) = 0 \\ x + y = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x-y=0 \\ x+y=1 \end{cases} \\ \begin{cases} x^2+y^2+xy-m=0 \\ x+y=1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=y=-\dfrac{1}{2} \\ \begin{cases} y=-1-x \\ x^2+(-1-x)^2+x(-1-x)-m=0 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x=y=-\dfrac{1}{2} & (1) \\ \begin{cases} y=-1-x \\ x^2+x+1-m=0 \end{cases} & \begin{array}{l} 2) \\ (3) \end{array} \end{array}\right.$$

*** Bài tập luyện tập.**

Bài 1. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x-2y+1=0 \\ x^2-y^2+xy-1=0 \end{cases}$$

Bài 2. Cho hệ phương trình:

$$\begin{cases} x+y=m+1 \\ x^2y+xy^2=2m^2-m-3 \end{cases}$$

a) Giải hệ khi m = 3.

b) Chứng minh hệ có nghiệm với mọi m. (ĐHQuy Nhơn - A99)

Bài 3. Giải và biện luận theo a hệ phương trình:

$$\begin{cases} \dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}=a \\ x+y=8 \end{cases}$$ (HVQHQT - D97)

Bài 4. Giải và biện luận theo m hệ phương trình:

$$\begin{cases} x-y=m \\ 2y+\sqrt{xy}=0 \end{cases}$$ (ĐH Đà Nẵng- B98)

Bài 5. Cho hệ phương trình:

$$\begin{cases} x+y=m \\ (x+1)y^2+xy=m(y+2) \end{cases}$$

a) Tìm m để hệ có hơn hai nghiệm.

b) Giải hệ khi m = 4 (ĐHQG Thố HCM- A97)

Bài 6. Cho biết hệ phương trình sau có nghiệm với mọi b:

$$\begin{cases} a(x^2+y^2)+x+y=b \\ y-x=b \end{cases}$$

Chứng minh a = 0. (ĐH Luật HN - A97)

2. Hệ phương trình đưa được về dạng tích.

Phương pháp:

Dạng 1.

$$\begin{cases} F(x,y).G(x,y)=0 \\ H(x,y)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} F(x,y)=0 \\ H(x,y)=0 \end{cases} \\ \begin{cases} G(x,y)=0 \\ H(x,y)=0 \end{cases} \end{array}\right.$$

Dạng 2.

$$\begin{cases} F(x,y).G(x,y)=0 \\ H(x,y).K(x,y)=0=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} F(x,y)=0 \\ H(x,y)=0 \end{cases} \\ \begin{cases} F(x,y)=0 \\ K(x,y)=0 \end{cases} \\ \begin{cases} G(x,y)=0 \\ H(x,y)=0 \end{cases} \\ \begin{cases} G(x,y)=0 \\ K(x,y)=0 \end{cases} \end{array}\right.$$

VD 1. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^2-5xy+6y^2=0 \\ 2x^2+y^2=1 \end{cases}$$

Hệ đã cho tương đương $\begin{cases} (x-2y)(x-3y)=0 \\ 2x^2+y^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x-2y=0 \\ 2x^2+y^2=1 \end{cases} \\ \begin{cases} x-3y=0 \\ 2x^2+y^2=1 \end{cases} \end{array}\right.$

VD 2. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} \log_4(x^2+y^2)-\log_4 2x+1=\log_4(x+3y) \\ \log_4(xy+1)-\log_4(4y^2+2y-2x+4)=\log_4\dfrac{x}{y}-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_4 4(x^2+y^2)=\log_4 2x(x+3y) \\ \log_4 4(xy+1)=\log_4\dfrac{x}{y}(4y^2+2y-2x+4) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4(x^2+y^2)=2x(x+3y) \\ 4(xy+1)=\dfrac{x}{y}(4y^2+2y-2x+4) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-3xy+2y^2=0 \\ 2y=xy-x^2+2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-y)(x-2y)=0 \\ (x-y)(y-2)=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x-y=0 \\ x-y=0 \end{cases} \\ \begin{cases} x-y=0 \\ y-2=0 \end{cases} \\ \begin{cases} x-2y=0 \\ x-y=0 \end{cases} \\ \begin{cases} x-2y=0 \\ y-2=0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=y \\ x=y=2 \\ x=y=0 \\ \begin{cases} x=4 \\ y=2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=y \\ \begin{cases} x=4 \\ y=2 \end{cases} \end{array}\right.$$

3. Hệ phương trình đối xứng loại 1.

Là hệ phương trình dạng $\begin{cases} f(x,y)=0 \\ g(x,y)=0 \end{cases}$ trong đó vai trò của x, y trong từng phương trình và do đó trong hệ phương trình như nhau:

$$\begin{cases} f(x,y)=f(y,x) \\ g(x,y)=g(y,x) \end{cases}$$

Thấy ngay (x; y) là nghiệm khi và chỉ khi (y; x) là nghiệm.

Cách giải:

• **Dạng 1.** Thông thường người ta đặt ẩn phụ:

S = x + y, P = xy

Ví dụ: Giải hệ :

$$\begin{cases} x^2y+xy^2=6 \\ xy+x+y=5 \end{cases}$$

Đặt S = x + y; P = xy và hệ đã cho trở thành:

$$\begin{cases} SP=6 \\ S+P=5 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} S=2 \\ P=3 \end{cases} \\ \begin{cases} S=3 \\ P=2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x+y=2 \\ xy=3 \end{cases} \\ \begin{cases} x+y=3 \\ xy=2 \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow \text{ nghiệm } (1,2); (2,1)$$

• **Dạng 2.** Biến đổi hệ về $\varphi(x)+\varphi(y), \varphi(x).\varphi(y)$.

Đặt $S=\varphi(x)+\varphi(y), P=\varphi(x).\varphi(y)$

Ví dụ 1: Giải hệ phương trình $\begin{cases} xy+x+y=5 \\ (x+1)^3+(y+1)^3=35 \end{cases}$ (XB)

Hệ tương đương $\begin{cases} (x+1)(y+1)=6 \\ \left[(x+1)+(y+1)\right]^3-3\left[(x+1)+(y+1)\right](x+1)(y+1)=35 \end{cases}$

Đặt S = (x + 1) + (y + 1); P =(x +1)(y + 1) hệ phương trình trở thành:

$$\begin{cases} P = 6 \\ S\left(S^2 - 3P\right) = 35 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} S = 5 \\ P = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases}$$

Ví dụ 2: $\begin{cases} x + y + x^2 + y^2 = 8 \\ xy(x+1)(y+1) = 12 \end{cases}$

Nếu đặt : $\begin{cases} S = x + y \\ P = xy \end{cases}$, ta thu được hệ sau: $\begin{cases} S^2 + S - 2P = 8 \\ P(P + S + 1) = 12 \end{cases}$ là một hệ phức tạp.

Chỉ cần biến đổi hệ thành $\begin{cases} x(x+1) + y(y+) = 8 \\ x(x+1).y(y+1) = 12 \end{cases}$

Đặt: S = x(x + 1), P = y(y + 1)

Hệ đã cho tương đương với :

$$\begin{cases} S + P = 8 \\ SP = 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} S = 6 \\ P = 2 \end{cases} \vee \begin{cases} S = 2 \\ P = 6 \end{cases}$$

Như vậy (x, y) là nghiệm của các hệ phương trình sau:

i) $\begin{cases} x^2 + x = 2 \\ y^2 + y = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \vee x = -2 \\ y = 2 \vee y = -3 \end{cases}$ Ta có 4 nghiệm (1; 2), (1; - 3), (- 2; 2), (- 2; - 3)

ii) $\begin{cases} x^2 + x = 6 \\ y^2 + y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \vee x = -3 \\ y = 1 \vee y = -2 \end{cases}$ Ta có 4 nghiệm (2; 1), (- 3; 1), (2; - 2), (- 3; - 2)

Suy ra nghiệm của hệ có 8 nghiệm.

• **Dạng 3.** Hệ đã cho không đối xứng đối với x, y nhưng đối xứng đối với $\varphi(x, y),\ \psi(x, y)$ nào đó. Biến đổi hệ về $\varphi(x, y) + \psi(x, y),\ \varphi(x, y).\psi(x, y)$.

Ví dụ 1: Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x(xy+1) + y(xy-1) = 14 \\ xy(x^2 - y^2) = 24 \end{cases} \qquad \text{(XB)}$$

Thấy ngay hệ không đối xứng đối với x,y.

Có thể cảm giác $\varphi(x, y) = x(xy+1),\ \psi(x, y) = y(xy-1)$, tiếc rằng không có được $\varphi(x, y).\psi(x, y)$.

Ta biến đổi hệ tương đương $\begin{cases} (x^2y + xy^2) + (x - y) = 14 \\ x^2y + xy^2)(x - y) = 24 \end{cases}$

Thấy ngay hệ đối xứng đối với $\varphi(x, y),\ \psi(x, y)$ trong đó $\varphi(x, y) = x^2y + xy^2 = xy(x + y),\ \psi(x, y) = x - y$.

Hệ tương đương: $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2y + xy^2 = 12 \\ x - y = 2 \end{cases} \\ \begin{cases} x^2y + xy^2 = 2 \\ x - y = 12 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y = x - 2 \\ xy(x + y) = 12 \end{cases} \\ \begin{cases} y = x - 12 \\ xy(x + y) = 2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y = x - 2 \\ x(x-2)(2x-2) = 12 \end{cases} \\ \begin{cases} y = x - 12 \\ x(x-12)(2x-12) = 2 \end{cases} \end{array}\right.$

Ví dụ 2: Giải và biện luận theo a hệ phương trình

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x-2y} + x + 2y = 5 \\ \dfrac{x+2y}{x-2y} = a \end{cases}$$

Thấy ngay hệ đối xứng đối với $\varphi(x,y),\ \psi(x,y)$ trong đó $\varphi(x,y) = \dfrac{1}{x-2y},\ \psi(x,y) = x+2y$. Tuy nhiên tính đối xứng ở đây chỉ có tính tương đối vì bạn thấy đấy $\varphi(x,y) = \dfrac{1}{x-2y} \neq 0,$ còn $\psi(x,y) = x+2y$ thì không có điều kiện gì. Ta có hệ: $\begin{cases} \varphi(x;y) + \psi(x;y) = 5 \\ \varphi(x;y).\psi(x;y) = a \end{cases}$

Suy ra $\varphi(x,y),\ \psi(x,y)$ là nghiệm của phương trình $X^2 - 5X + a = 0$ (*)

Vì phương trình có thể có nghiệm bằng 0, khi đó chỉ có $\psi(x,y)$ nhận nghiệm đó thôi. Như thế nên phải xét hai trường hợp:

i) a = 0: $\begin{cases} \varphi(x;y) + \psi(x;y) = 5 \\ \varphi(x;y).\psi(x;y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \psi(x;y) = 0 \\ \varphi(x;y) = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y = 0 \\ \dfrac{1}{x-2y} = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y = 0 \\ x-2y = \dfrac{1}{5} \end{cases}$

ii) a =$\neq 0$: Phương trình (*) có nghiệm chỉ khi $\Delta = 25 - 4a \geq 0 \Leftrightarrow a \leq \dfrac{25}{4}$. Hai nghiệm của (*) là $\dfrac{5 \pm \sqrt{25-4a}}{2}$.

Hệ tương đương với:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \dfrac{1}{x-2y} = \dfrac{5+\sqrt{25-4a}}{2} \\ x+2y = \dfrac{5-\sqrt{25-4a}}{2} \end{cases} \\ \begin{cases} \dfrac{1}{x-2y} = \dfrac{5-\sqrt{25-4a}}{2} \\ x+2y = \dfrac{5+\sqrt{25-4a}}{2} \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x-2y = \dfrac{2}{5+\sqrt{25-4a}} = \dfrac{5-\sqrt{25-4a}}{2a} \\ x+2y = \dfrac{5-\sqrt{25-4a}}{2} \end{cases} \\ \begin{cases} x-2y = \dfrac{2}{5-\sqrt{25-4a}} = \dfrac{5+\sqrt{25-4a}}{2a} \\ x+2y = \dfrac{5+\sqrt{25-4a}}{2} \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x-2y=\dfrac{5-\sqrt{25-4a}}{2a} \\ x+2y=\dfrac{5-\sqrt{25-4a}}{2} \end{cases} \\ \begin{cases} x-2y=\dfrac{5+\sqrt{25-4a}}{2a} \\ x+2y=\dfrac{5+\sqrt{25-4a}}{2} \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=\dfrac{5-\sqrt{25-4a}}{4}\left(1+\dfrac{1}{a}\right) \\ y=\dfrac{5-\sqrt{25-4a}}{8}\left(1-\dfrac{1}{a}\right) \end{cases} \\ \begin{cases} x=\dfrac{5+\sqrt{25-4a}}{4}\left(1+\dfrac{1}{a}\right) \\ y=\dfrac{5+\sqrt{25-4a}}{8}\left(1-\dfrac{1}{a}\right) \end{cases} \end{array}\right.$$

*** Bài tập luyện tập.**

Bài 1. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x+y+2xy=1 \\ x^3+y^3=11 \end{cases}$ (XB)

Bài 2. Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2(x+y)-xy=1 \\ x^2y+xy^2=1 \end{cases}$ (XB)

Bài 3. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x-y+x^2+y^2=5 \\ xy(-x+y+xy-1)=6 \end{cases}$ (XB)

Bài 4. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2+y^2=5 \\ x^4-x^2y^2+y^4=13 \end{cases}$ (ĐH Ngoại Thương A98)

Bài 5. Giải hệ phương trình $\begin{cases} (x+y)(1+\dfrac{1}{xy})=5 \\ (x^2+y^2)(1+\dfrac{1}{x^2y^2})=49 \end{cases}$ (ĐH Ngoại Thương A99)

Bài 6. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x+y+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=4 \\ x^2+y^2+\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}=4 \end{cases}$ (ĐH An Ninh A99)

Bài 7. Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{x}{y}}+\sqrt{\dfrac{\mathrm{y}}{\mathrm{x}}}=\dfrac{7}{\sqrt{xy}}+1 \\ x\sqrt{xy}+y\sqrt{xy}=78 \end{cases}$ (ĐH Hàng Hải A99)

Bài 8. Cho hệ phương trình $\begin{cases} x+y+xy=m \\ x^2+y^2=m \end{cases}$

a) Giải hệ khi m = 5

b) Tìm tất cả các giá trị m để hệ có nghiệm.

Bài 9. Cho hệ phương trình $\begin{cases} x+y+x^2+y^2=8 \\ xy(x+1)(y+1)=m \end{cases}$

a) Giải hệ khi m = 12
b) Tìm tất cả các giá trị m để hệ có nghiệm.

Bài 10. Cho hệ phương trình $\begin{cases} x + y + xy = a \\ x^2y + xy^2 = 3a - 8 \end{cases}$

a) Giải hệ khi a = $\frac{7}{2}$
b) Tìm tất cả các giá trị a để hệ có nghiệm.

Bài 11. Cho hệ phương trình $\begin{cases} x + y + xy = m + 1 \\ x^2y + xy^2 = m \end{cases}$

a) Giải hệ khi m = 2
b) Tìm tất cả các giá trị m để hệ có ít nhất một nghiệm (x;y) sao cho x > 0, y > 0.

4. Hệ phương trình đối xứng loại 2:

Là hệ phương trình dạng $\begin{cases} f(x, y) = 0 \\ g(x, y) = 0 \end{cases}$ trong đó nếu thay đổi vai trò của x, y cho nhau thì phương trình này trở thành phương trình kia và ngược lại. Vai trò của x, y trong từng phương trình không như nhau nhưng trong hệ phương trình thì như nhau:

$$\begin{cases} f(x, y) = g(y, x) \\ g(x, y) = f(y, x) \end{cases}$$

Thấy ngay (x; y) là nghiệm khi và chỉ khi (y; x) là nghiệm.

Cách giải:

Trừ từng vế của hai phương trình ta được phương trình tích

VD1. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^2 = 3x - y & (1) \\ y^2 = 3y - x & (2) \end{cases} \qquad \text{(ĐHMTCN - A98)}$$

Trừ từng vế (1) và (2) cho nhau, ta có: $x^2 - y^2 = 3(x - y) + x - y$

$$\Leftrightarrow (x - y)(x + y - 4) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - y = 0 \\ x + y - 4 = 0 \end{array}\right.$$

i) $x - y = 0 \Leftrightarrow y = x$ thay vào (1): $x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0, x = 2$.
Ta có hai nghiệm (0; 0), (2; 2)

ii) $x + y - 4 = 0 \Leftrightarrow y = 4 - x$ thay vào (1): $x^2 = 3x - 4 + x \Leftrightarrow x = 2$
Ta có nghiệm (2; 2).

Tóm lại, hệ phương trình đã cho có hai nghiệm (0; 0), (2; 2).

VD2. Xác định a < 0 để hệ sau có nghiệm duy nhất

$$\begin{cases} x^2y + a = y^2 & (1) \\ xy^2 + a = x^2 & (2) \end{cases}$$ (ĐHDược - A97)

Trừ từng vế (1) và (2) cho nhau ta có:

$$xy(x - y) = y^2 - x^2 \Leftrightarrow (x - y)(xy + x + y) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - y = 0 \\ xy + x + y = 0 \end{array}\right.$$

Do a < 0 nên từ hệ đã cho suy ra x > 0, y > 0 như thế xy + x + y = 0 vô nghiệm.

Với x - y = 0 $\Leftrightarrow$ y = x thay vào (1): $x^2 - x^3 = a$

Đặt $f(x) = x^2 - x^3$, x > 0.

$f'(x) = 2x - 3x^2$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0, x = \frac{3}{2}$

x	0		3/2		$+\infty$
f '(x)	0	+	0	-	
f(x)	0	↗		↘	$-\infty$

Thấy ngay với mọi a < 0 phương trình (*) có nghiệm duy nhất nên hệ có nghiệm duy nhất.

*** Bài tập luyện tập.**

Bài 1. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x + 3y = 4\dfrac{y}{x} \\ y + 3x = 4\dfrac{x}{y} \end{cases}$ (ĐHQG HN -A97)

Bài 2. Giải hệ phương trình $\begin{cases} \log_x(3x + 2y) = 2 \\ \log_y(3y + 2x) = 2 \end{cases}$ (ĐH Công đoàn - A97)

Bài 3. Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2x + \dfrac{1}{y} = \dfrac{3}{x} \\ 2y + \dfrac{1}{x} = \dfrac{3}{y} \end{cases}$ (ĐHQG HN - B99)

Bài 4. Cho hệ phương trình $\begin{cases} x^2 - (x + y) = 2m \\ y^2 - (x + y) = 2m \end{cases}$

a) Giải hệ khi m = 0

b) Tìm m để hệ có nghiệm duy nhất. Tìm nghiệm đó.

(ĐH Công đoàn - A99)

Bài 5. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3 = 3x + 8y \\ y^3 = 3y + 8x \end{cases}$ (ĐHQG HN - D99)

Bài 6. Cho hệ phương trình $\begin{cases} 2x^2 = y + \dfrac{a^2}{y} \\ 2y^2 = x + \dfrac{a^2}{x} \end{cases}$

Chứng minh rằng hệ có nghiệm với mọi a.

5. Hệ phương trình đẳng cấp.

$$\begin{cases} f(x,y) = a & (1) \\ g(x,y) = a & (2) \end{cases} \text{ trong đó : } \begin{cases} f(tx,ty) = t^k f(x,y) \\ g(tx,ty) = t^k g(x,y) \end{cases}$$

Mở rộng: $\begin{cases} f(x,y) = F(x,y) & (3) \\ g(x,y) = G(x,y) & (4) \end{cases}$

trong đó f(tx, ty) = t^kf(x, y), g(tx, ty) = t^kg(x, y) : cùng đẳng cấp bậc k.

F(tx, ty) = t^mF(x, y), G(tx, ty) = t^mG(x, y) : cùng đẳng cấp bậc m.

PPGiải: Xét x = 0 có phải là nghiệm.

Xét x $\neq$ 0: Đặt y = tx

VD1: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^3 - y^3 = 7 \\ xy(x-y) = 2 \end{cases} \qquad \text{(HVQHQT - D97)}$$

HD.

Hệ đã cho tương đương với : $\begin{cases} x^3 - y^3 = 7 \\ x^2y - xy^2 = 2 \end{cases}$

Từ phương trình thứ hai thấy ngay x$\neq$0, y $\neq$ 0. Đặt y = tx.

hệ $\begin{cases} x^3 - y^3 = 7 \\ x^2y - xy^2 = 2 \end{cases}$ trở thành $\begin{cases} x^3 - t^3x^3 = 7 \\ tx^3 - t^2x^3 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3(1-t^3) = 7 \\ x^3(t-t^2) = 2 \end{cases}$ (*)

Từ (*) ta thấy $t \neq 0, t \neq 1$. Chia từng vế của hai phương trình, ta có:

$$\frac{1-t^3}{t-t^2} = \frac{7}{2} \Leftrightarrow \frac{1+t+t^2}{t} = \frac{7}{2} \Leftrightarrow 2t^2 - 5t + 2 = 0 \Leftrightarrow t = 2, t = \frac{1}{2}$$

i) t = 2 thay vào (*) ta có x^3 = -1 $\Leftrightarrow$ x = - 1, y = 2x = -2

ii) t = $\frac{1}{2}$ thay vào (*) ta có x^3 = 8 $\Leftrightarrow$ x = 2, y = $\frac{1}{2}$x = 1

VD2: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} 3x^2 - 2xy + 2y^2 = 7 \\ x^2 + 6xy - 3y^2 = -8 \end{cases}$$

HD.

Từ phương trình thứ hai thấy ngay $y \neq 0$. Đặt x = ty.

Hệ $\begin{cases} 3x^2 - 2xy + 2y^2 = 7 \\ x^2 + 6xy - 3y^2 = -8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3t^2y^2 - 2ty^2 + 2y^2 = 7 \\ t^2y^2 + 6ty^2 - 3y^2 = -8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2(3t^2 - 2t + 2) = 7 & (1) \\ y^2(t^2 + 6t - 3) = -8 & (2) \end{cases}$

Từ (1) thấy ngay $3t^2 - 2t + 7 > 0, \forall t$. Chia từng vế của (2) cho (1):

$$\frac{t^2 + 6t - 3}{3t^2 - 2t + 2} = -\frac{8}{7} \Leftrightarrow 31t^2 + 26t - 5 = 0 \Leftrightarrow t = -1, t = \frac{5}{31}$$

***Chú ý:** Có thể giải hệ đã cho theo cách sau:

Hệ đã cho tương đương với :

$$\begin{cases} 24x^2 - 16xy + 16y^2 = 56 \\ 7x^2 + 42xy - 21y^2 = -56 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 24x^2 - 16xy + 16y^2 = 56 & (1) \\ 31x^2 + 26xy - 5y^2 = 0 & (2) \end{cases}$$

Ta giải (2)

$31x^2 + 26xy - 5y^2 = 0$

$\Leftrightarrow (31x - 5y)(x + y) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 31x - 5y = 0 \\ x + y = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = \dfrac{31x}{5} \\ y = -x \end{array}\right.$ thay vào (1)

*** Bài tập luyện tập.**

Bài 1. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2y + xy^2 = 30 \\ x^3 + y^3 = 35 \end{cases}$ (ĐHQG Mỏ - ĐC -A98)

Bài 2. Cho hệ phương trình $\begin{cases} x^2 - 4xy + y^2 = k \\ y^2 - 3xy = 4 \end{cases}$

1) Giải hệ khi k = 1, k = 4.

2) Chứng minh rằng hệ có nghiệm với mọi k $\neq$ 4.

Bài 3. Cho hệ phương trình $\begin{cases} 3x^2 + 2xy + y^2 = 11 \\ x^2 + 2xy + 3y^2 = 17 + m \end{cases}$

1) Giải hệ khi m = 0.

2) Tìm m để hệ có nghiệm.

(ĐHQG Tp Hồ Chí Minh)

Bài 4. Cho hệ phương trình $\begin{cases} x^3 - ay^3 = \dfrac{1}{2}(a+1)^2 \\ x^3 + ax^2y + xy^2 = 1 \end{cases}$

Tìm tất cả các giá trị của a sao cho hệ có nghiệm và mọi nghiệm (x; y) của hệ đều thoả x + y = 0.

HD. Từ dấu hiệu cần x + y = 0 $\Leftrightarrow$ y = - x thay vào hệ ta có:

$$\begin{cases} (a+1)x^3 = \dfrac{1}{2}(a+1)^2 \\ 2 - a)x^3 = 1 \end{cases} \Rightarrow \frac{a+1}{2-a} = \frac{1}{2}(a+1)^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a + 1 = 0 \\ \dfrac{1}{2-a} = \dfrac{1}{2}(a+1) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = -1 \\ a^2 - a = 0 \end{array}\right.$$

$\Leftrightarrow a = 0 \vee a = \pm 1$

Xét từng trường hợp, xem giá trị a nào thoả điều kiện bài toán.

6. Các hệ khác.

VD1. Cho hệ phương trình $\begin{cases} x^3 - y^3 = m(x-y) \\ x + y = -1 \end{cases}$

1) Giải hệ khi m = 3.

2) Tìm m để hệ có 3 nghiệm (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) sao cho x_1, x_2, x_3 lập thành một cấp số cộng trong đó $|x_1|, |x_3|$ lớn hơn 1.

HD. $\begin{cases} x^3 - y^3 = m(x-y) \\ x + y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-y)(x^2 + xy + y^2 - m) = 0 \\ x + y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x - y = 0 \\ x + y = -1 \end{cases} \\ \begin{cases} x^2 + xy + y^2 - m = 0 \\ x + y = -1 \end{cases} \end{array} \right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = y = -\dfrac{1}{2} \\ \begin{cases} y = -x - 1 \\ x^2 + x(-x-1) + (-x-1)^2 - m = 0 \end{cases} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = y = -\dfrac{1}{2} \\ \begin{cases} y = -x - 1 \\ x^2 + x + 1 - m = 0 \quad (*) \end{cases} \end{array} \right.$

Khi m > $\frac{3}{4}$ phương trình (*) có hai nghiệm và trung bình cộng hai nghiệm bằng - $\frac{1}{2}$. Do đó ba nghiệm đã lập thành cấp số cộng. Gọi hai nghiệm này là x_1, x_2 thì cấp số cộng đó là: x_1, - $\frac{1}{2}$, x_2 . Ta phải có $|x_1| > 1, |x_2| > 1$

Thấy ngay chỉ cần $|x_2| > 1 \Rightarrow |x_1| > 1$ (do x_1, x_2 đối xứng nhau qua - $\frac{1}{2}$ mà - 1 gần - $\frac{1}{2}$ hơn 1). Ta phải có: $|x_2| > 1 \Leftrightarrow \left| \dfrac{-1 + \sqrt{4m-3}}{2} \right| > 1 \Leftrightarrow 1 - 2\sqrt{4m-3} + 4m - 3 > 4$

$1 - 2\sqrt{4m-3} + 4m - 3 > 4 \Leftrightarrow \sqrt{4m-3} < 2m - 4 \Leftrightarrow \begin{cases} m > 2 \\ 4m - 3 < 4m^2 - 24m + 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 2 \\ m^2 - 7m + 3 > 0 \end{cases}$

VD2. Cho hệ phương trình $\begin{cases} x - y = a(1 + xy) \\ xy + x + y + 2 = 0 \end{cases}$

1) Giải hệ khi a = $\frac{1}{2}$.

2) Tìm a để hệ có nghiệm.

VD3. Giải các hệ phương trình:

1) $\begin{cases} x + y = 1 \\ x^3 + y^3 = x^2 + y^2 \end{cases}$

2) $\begin{cases} x^3 + y^3 = 1 \\ x^5 + y^5 = x^2 + y^2 \end{cases}$

VD4. Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2y(x^2 - y^2) = 3x \\ x(x^2 + y^2) = 10y \end{cases}$

VD5. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 + 4y^2 = 5 \\ 4xy + x + 2y = 7 \end{cases}$

HD.

Cộng từng vế ta được $(x + 2y)^2 + (x + 2y) - 12 = 0$

Suy ra x + 2y = - 4, x + 2y = 3.

Từ phương trình thứ hai:

i) x + 2y = 3 suy ra xy = 1

ii) x + 2y = - 4 suy ra xy = $\frac{11}{4}$

VD6. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 + y^2 + x + y = 4 \\ x(x + y + 1) + y(y + 1) = 2 \end{cases}$ (I)

HD.

(I) $\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 + x + y = 4 \\ x^2 + y^2 + x + y + xy = 2 \Rightarrow xy = -2 \end{cases}$

Ta có $S = x + y; P = xy \Rightarrow S^2 = x^2 + y^2 + 2xy \Rightarrow x^2 + y^2 = S^2 - 2P$

Vậy $(I) \Leftrightarrow \begin{cases} S^2 - 2P + S = 4 \\ S^2 - P + S = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P = -2 \\ S = 0 \text{ hay } S = -1 \end{cases}$

$TH_1 : \begin{cases} S = x + y = 0 \\ P = xy = -2 \end{cases}$ vậy x, y là nghiệm của phương trình $X^2 + 0X - 2 = 0$

Vậy hệ có 2 nghiệm $\begin{cases} x = \sqrt{2} \\ x = -\sqrt{2} \end{cases}$ hay $\begin{cases} x = -\sqrt{2} \\ y = \sqrt{2} \end{cases}$

$TH_2 : \begin{cases} S = x + y = -1 \\ P = xy = -2 \end{cases}$ vậy x,y là nghiệm của phương trình $X^2 + X - 2 = 0$

$\Rightarrow X = 1 \text{ hay } X = -2$. Vậy hệ có 2 nghiệm $\begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \end{cases}$ V $\begin{cases} x = -2 \\ y = 1 \end{cases}$

Tóm lại hệ Pt (I) có 4 nghiệm $\begin{cases} x = \sqrt{2} \\ y = -\sqrt{2} \end{cases}$ V $\begin{cases} x = -\sqrt{2} \\ y = \sqrt{2} \end{cases}$ V $\begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \end{cases}$ V $\begin{cases} x = -2 \\ y = 1 \end{cases}$

Cách 2.

$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2+x+y=4 \\ x^2+y^2+x+y+xy=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2+x+y=4 \\ xy=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)^2+x+y=0 \\ xy=-2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y=0 \text{ hay } x+y=-1 \\ xy=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=0 \text{ hay } x+y=-1 \\ xy=-2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x=-y \\ x^2=2 \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} x+y=-1 \\ x^2+x-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\sqrt{2} \\ y=-\sqrt{2} \end{cases} \text{ V } \begin{cases} x=-\sqrt{2} \\ y=\sqrt{2} \end{cases} \text{ V } \begin{cases} x=1 \\ y=-2 \end{cases} \text{ V } \begin{cases} x=-2 \\ y=1 \end{cases}$

VD7. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \sqrt{2x+y+1}-\sqrt{x+y}=1 \\ 3x+2y=4 \end{cases}$ (I)

HD.

$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2x+y+1}-\sqrt{x+y}=1 \\ (2x+y+1)+(x+y)=5 \end{cases}$

Đặt $u=\sqrt{2x+y+1} \geq 0, v=\sqrt{x+y} \geq 0$

(I) thành $\begin{cases} u-v=1 \\ u^2+v^2=5 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} u_1=2 \Rightarrow v_1=1 \\ u_2=-1 \Rightarrow v_2=-2(\text{loại}) \end{array} \right.$

Vậy $(I) \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2x+y+1}=2 \\ \sqrt{x+y}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y+1=4 \\ x+y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=-1 \end{cases}$

VD8. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x+\sqrt{x^2-2x+2}=3^{y-1}+1 \\ y+\sqrt{y^2-2y+2}=3^{x-1}+1 \end{cases}$ (I)

Đặt u = x – 1, v = y – 1

(I) thành $(II) \begin{cases} u+\sqrt{u^2+1}=3^v \\ v+\sqrt{v^2+1}=3^u \end{cases}$

Xét hàm $f(x)=x+\sqrt{x^2+1}$

$$f'(x)=1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}=\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}}>\frac{|x|+x}{\sqrt{x^2+1}}\geq 0$$

Vậy f đồng biến trên R.

Nếu $u>v \Rightarrow f(u)>f(v) \Rightarrow 3^v>3^u \Rightarrow v>u$ (vô lý)

Tương tự nếu v > u cũng dẫn đến vô lý

Do đó hệ (II) $\Leftrightarrow \begin{cases} u+\sqrt{u^2+1}=3^u \\ u=v \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1=3^u(\sqrt{u^2+1}-u) \quad (1) \\ u=v \end{cases}$

Đặt: $g(u) = 3^u(\sqrt{u^2+1} - u)$

$$\Rightarrow g'(u) = 3^u \ln 3(\sqrt{u^2+1} - u) + 3^u\left(\frac{u}{\sqrt{u^2+1}} - 1\right)$$

$$g'(u) = 3^u\left(\sqrt{u^2+1} - u\right)\left(\ln 3 - \frac{1}{\sqrt{u^2+1}}\right) > 0, \forall u \in R$$

Vậy g(u) đồng biến trên R.

Ta có g(0) = 1. Vậy u = 0 là nghiệm duy nhất của (1)

Nên (II) $\Leftrightarrow$ u = 0 = v

Vậy (I) $\Leftrightarrow$ x = y = 1.

***Chú ý: Để chứng tỏ u = v có thể biến đổi:

$$\begin{cases} u + \sqrt{u^2+1} = 3^v \\ v + \sqrt{v^2+1} = 3^u \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 = 3^v\left(u - \sqrt{u^2+1}\right) \\ -1 = 3^u\left(v - \sqrt{v^2+1}\right) \end{cases} \Rightarrow 3^u\left(v - \sqrt{v^2+1}\right) = 3^v\left(u - \sqrt{u^2+1}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{u - \sqrt{u^2+1}}{3^u} = \frac{v - \sqrt{v^2+1}}{3^v} \qquad (*)$$

Xét hàm số $f(t) = \dfrac{t - \sqrt{t^2+1}}{3^t}$ đồng biến, nên (*) suy ra u = v.

VD9. Cho hệ phương trình $\begin{cases} x^2 + y^2 = 2(1+a) \\ (x+y)^2 = 4 \end{cases}$

1) Giải hệ khi a = 1.

2) Tìm tất cả các giá trị của a để hệ có đúng hai nghiệm.

HD. Cách 1. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 2(1+a) \\ (x+y)^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 2(1+a) \\ (x+y-2)(x+y+2) = 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2 + y^2 = 2(1+a) \\ x + y - 2 = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x^2 + y^2 = 2(1+a) \\ x + y + 2 = 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2 + (2-x)^2 = 2(1+a) \\ y = 2 - x \end{cases} \\ \begin{cases} x^2 + (2+x)^2 = 2(1+a) \\ y = -2 - x \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2 - 2x + 1 - a = 0 & (1) \\ y = 2 - x & (2) \end{cases} \\ \begin{cases} x^2 + 2x + 1 - a = 0 & (3) \\ y = -2 - x & (4) \end{cases} \end{array}\right.$$

1) a = 1: Hệ đã cho trở thành $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2 - 2x = 0 \\ y = 2 - x \end{cases} \\ \begin{cases} x^2 + 2x = 0 \\ y = -2 - x \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 0 \vee x = 2 \\ y = 2 - x \end{cases} \\ \begin{cases} x = 0 \vee x = -2 \\ y = -2 - x \end{cases} \end{array}\right.$

Suy ra 4 nghiệm (0; 2), (2; 0), (0; - 2), (- 2; 0).

2) Hệ có đúng hai nghiệm.

Nhận xét rằng (1) và (3) có cùng biệt số $\Delta' = a$. Suy ra a ≥ 0

- a > 0: Mỗi phương trình (1) và (3) có 2 nghiệm phân biệt, trong khi từ (2) và (4) ta có 2 - x $\neq$ - 2 - x với $\forall$ x nên hệ có ít nhất 4 nghiệm. Suy ra a > 0 không thoả.
- a = 0: Hệ (1)&(2) có nghiệm (1; 1), hệ (3)&(4) có nhiệm (- 1; - 1). Vậy a = 0 thoả.

Cách 2 (PP Hình học).
Thấy ngay a ≥ 0. Trong hệ toạ độ Đê-các Oxy:
Xem Pt $x^2 + y^2 = 2(1+a)$, a ≥ 0 là Pt đường tròn (O, R), R = $\sqrt{2(1+a)}$
Xem $(x + y)^2 = 4 \Leftrightarrow (x + y - 2)(x + y + 2) = 0$ là phương trình hai đường thẳng:
$\Delta_1: x + y - 2 = 0$, $\Delta_2: x + y + 2 = 0$
Hai đường thẳng này đối xứng nhau qua O.
Pt có đúng hai nghiệm $\Leftrightarrow$ Δ_1 tiếp xúc với (O, R)(do đó Δ_2 cũng tiếp xúc với (O, R))

$$\Leftrightarrow d(O, \Delta_1) = R \Leftrightarrow \frac{|0+0-2|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2(1+a)} \Leftrightarrow a = 0.$$

VD10. Cho hệ phương trình $\begin{cases} x + ay - a = 0 \\ x^2 + y^2 - x = 0 \end{cases}$

1) Tìm tất cả các giá trị của a để hệ có hai nghiệm phân biệt.
2) Gọi hai nghiệm là $(x_1; y_1), (x_2; y_2)$ là hai nghiệm. Chứng minh rằng:

$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 \leq 1$$

HD. 1) Trong hệ toạ độ Đê-các Oxy:
Xem phương trình x + ay - a = 0 là phương trình đường thẳng d.
Xem phương trình $x^2 + y^2 - x = 0$ là phương trình đường tròn I($\frac{1}{2}$; 0), R = $\frac{1}{2}$.
Hệ có hai nghiệm phân biệt khi chỉ khi đường thẳng cắt đường tròn tại hai điểm phân biệt

$$\Leftrightarrow d(I, d) < R \Leftrightarrow \frac{\left|\frac{1}{2} - a\right|}{\sqrt{1+a^2}} < \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sqrt{1+a^2} > |1-2a| \Leftrightarrow 1 + a^2 > 4a^2 - 4a + 1 \Leftrightarrow 0 < a < \frac{4}{3}$$

2) Gọi A, B là các giao điểm của đường tròn I($\frac{1}{2}$; 0) và đường thẳng d.
Khi đó $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$.
AB là một dây cung của đường tròn nên AB $\leq$ 2R =1.
Để ý rằng AB = $(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$. Ta có đpcm.

VD11. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} \sqrt{1+x_1}+\sqrt{1+x_2}+...+\sqrt{1+x_{1980}}=1980\sqrt{\dfrac{1981}{1980}} \\ \sqrt{1-x_1}+\sqrt{1-x_2}+...+\sqrt{1-x_{1980}}=1980\sqrt{\dfrac{1979}{1980}} \end{cases}$$

HD.

Đặt $\overrightarrow{a_i}=\left(\sqrt{1+x_i};\sqrt{1-x_i}\right)_{\overline{i\,=\,1,\,1980}}$

$\Rightarrow \left|\overrightarrow{a_i}\right|=\sqrt{2}$ (i = 1, 2, ..., 1980), $\sum\limits_{i=1}^{1980}\left|\overrightarrow{a_i}\right|=1980\sqrt{2}$ (1)

Mặt khác $\sum\limits_{i=1}^{1980}\overrightarrow{a_i}=\left(\sqrt{1+x_1}+...+\sqrt{1+x_{1980}};\sqrt{1-x_1}+...+\sqrt{1-x_{1980}}\right)$

$\Rightarrow \left|\sum\limits_{i=1}^{1980}\overrightarrow{a_i}\right|=\sqrt{\left(\sqrt{1+x_1}+...+\sqrt{1+x_{1980}}\right)^2+\left(\left(\sqrt{1-x_1}+...+\sqrt{1-x_{1980}}\right)^2\right)}=$

$=\sqrt{1980.1981+1980.1979}=1980\sqrt{2}$ (2)

Từ (1)&(2) suy ra các véc tơ $\overrightarrow{a_i}(i=\overline{1,1980})$ cùng phương, cùng hướng, cùng độ dài.

Như thế $x_1 = x_2 = ...\ x_{1980} \Rightarrow \sqrt{1+x_1}=\sqrt{1+x_2}=...=\sqrt{1+x_{1980}}=\sqrt{\dfrac{1981}{1980}}$

$\Rightarrow x_1 = x_2 = ...\ x_{1980} = \dfrac{1}{1980}$.

VD12. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} y+xy^2=6x^2 \\ 1+x^2y^2=5x^2 \end{cases}$$ (ĐHSPHN - A2000)

HD. Thấy rằng x = 0 không thoả phương trình thứ hai.
Chia hai vế của cả hai phương trình cho x^2, ta có:

$$\begin{cases} \dfrac{y}{x^2}+\dfrac{y^2}{x}=6 \\ \dfrac{1}{x^2}+y^2=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{y}{x}\left(\dfrac{1}{x}+y\right)=6 \\ \dfrac{1}{x^2}+y^2=5 \end{cases}$$

Đặt $u=\dfrac{1}{x}+y,\ v=\dfrac{y}{x} \Rightarrow \begin{cases} uv=6 \\ u^2-2v=5 \end{cases}$

*** Bài tập luyện tập.**

Bài 1. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2+y^2=\dfrac{82}{9} \\ \left|x+\dfrac{1}{y}\right|+\left|\dfrac{10}{3}-x+y\right|=\dfrac{10}{3}+y+\dfrac{1}{y} \end{cases}$ (Bộ đề thi TS)

Bài 2. Giải hệ phương trình $x^2 + a^2 = y^2 + b^2 = (x - b)^2 + (y - b)^2$.

(Bộ đề thi TS)

Bài 3. Cho hệ phương trình $\begin{cases} 7x + y - \dfrac{a^3}{x^2} = 0 \\ x + 7y - \dfrac{a^3}{y^2} = 0 \end{cases}$ (ĐHHuế - A97)

Chứng minh hệ có nghiệm duy nhất khi a > 0. Còn đúng không khi a < 0 ?

Bài 4. Giải hệ phương trình $\begin{cases} (2x+y)^2 - 5(4x^2 - y^2) + 6(2x - y)^2 = 0 \\ 2x + y + \dfrac{1}{2x - y} = 0 \end{cases}$

(ĐHXD - A97)

Bài 5. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x + y + xy = 11 \\ x^2 + y^2 + 3(x + y) = 28 \end{cases}$ (ĐHQGHN - D2000)

Bài 6. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 + y^2 - 3x + 4y = 1 \\ 3x^2 - 2y^2 - 9x - 8y = 3 \end{cases}$ (ĐHSP2HN - A99)

Bài 7. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 + y^2 + xy = 7 \\ x^4 + y^4 + x^2y^2 = 21 \end{cases}$ (ĐHSPHN - B2000)

Bài 8. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 + 3y^2 + 2xy = 9 \\ 2x^2 + y^2 + 2xy = 2 \end{cases}$ (ĐHSP TPhố HCM - A2000)

Bài 9. Giải hệ phương trình $\begin{cases} xy + x + y = 11 \\ x^2y + xy^2 = 30 \end{cases}$ (ĐHGTVT - A2000)

Bài 10. Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2x^2 = y^2 + z^2 \\ xyz = 64 \end{cases}$ trong đó $\log_y x$, $\log_z y$, $\log_x z$ theo thứ tự đó lập thành một cấp số cộng. (ĐHNgoại Ngữ - D2000)

Bài 11. Tìm a để hệ sau có nghiệm

$\begin{cases} x^2 - 2xy - 3y^2 = 8 \\ 2x^2 + 4xy + 5y^2 = a^4 - 4a^3 + 4a^2 - 12 + \sqrt{105} \end{cases}$ (ĐH AN - A2000)

Bài 12. Cho hệ $\begin{cases} x + xy + y = m + 2 \\ x^2y + xy^2 = m + 1 \end{cases}$

1) Giải hệ khi m = - 3.
2) Xác định m để hệ có nghiệm.

(ĐH CS - A2000)

Bài 13. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \left(\dfrac{x}{y}\right)^2 + \left(\dfrac{x}{y}\right)^3 = 12 \\ (xy)^2 + xy = 6 \end{cases}$ (ĐH Công Đoàn - A2000)

Bài 14. Tìm tất cả các giá trị m để hệ sau có hai nghiệm phân biệt:

$$\begin{cases} x^3 = y^2 + 7x^2 - mx \\ y^3 = x^2 + 7y^2 - my \end{cases} \qquad \text{(ĐH Vinh - A2000)}$$

VI. Phương trình và hệ phương trình không mẫu mực. (Xem phương trình không mẫu mực)

VII. Phương trình lượng giác (Xem phương trình lượng giác).

VIII. Phương trình vô tỷ.

1. Đưa phương trình về dạng tích.

VD. Giải phương trình: $x^2 + 2x + \sqrt{x+6} = 4$

HD. Ta có phương trình đã cho tương đương với $(x+1)^2 + \sqrt{(x+1)+5} = 5$

$$\Leftrightarrow \Leftrightarrow \begin{cases} t^2 - (t+5) + (t + \sqrt{t+5}) = 0 \\ t = x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (t + \sqrt{t+5})(t - \sqrt{t+5} + 1) = 0 \\ t = x+1 \end{cases}$$

2. Giải phương trình trên từng tập con của tập xác định.

VD. Giải phương trình: $\sqrt{x^2 - 3x + 2} + \sqrt{x^2 - 4x + 3} = 2\sqrt{x^2 - 5x + 4}$

HD. TXĐ: $(-\infty;1) \cup (4;+\infty)$

Phương trình đã cho tương đương:

$$\sqrt{(x-1)(x-2)} + \sqrt{(x-1)(x-3)} = 2\sqrt{(x-1)(x-4)}$$

Thấy ngay **x = 1:** Thoả phương trình.

i) Nếu $x \geq 4$**:**

Phương trình đã cho tương đương: $\sqrt{(x-1)}\left(\sqrt{x-2} + \sqrt{x-3} - 2\sqrt{x-4}\right) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \sqrt{x-1} = 0 & (1) \\ \sqrt{x-2} + \sqrt{x-3} = 2\sqrt{x-4} & (2) \end{array}\right.$$

(1) cho x= 1 (loại).

(2) vô nghiệm vì $\sqrt{x-2} > \sqrt{x-4}, \sqrt{x-3} > \sqrt{x-4} \Rightarrow \sqrt{x-2} + \sqrt{x-3} > 2\sqrt{x-4}$

ii) nếu x < 1:

Phương trình đã cho tương đương:

$$\sqrt{(1-x)(2-x)} + \sqrt{(1-x)(3-x)} = 2\sqrt{(1-x)(4-x)}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2-x} + \sqrt{3-x} = 2\sqrt{4-x} \qquad (3)$$

(3) vô nghiệm vì $\sqrt{2-x} < \sqrt{4-x}, \sqrt{3-x} < \sqrt{4-x} \Rightarrow \sqrt{2-x} + \sqrt{3-x} < 2\sqrt{4-x}$

3. Biến đổi tương đương các phương trình.

(xem các phương trình chuyển về phương trình bậc nhất)

4. Các phương trình vô tỷ không mẫu mực.

(Xem phương trình không mẫu mực)

VD1. Giải phương trình $2\sqrt[2009]{(1+x)^2} + 3\sqrt[2009]{1-x^2} + \sqrt[2009]{(1-x)^2} = 0$

Nhận thấy x = ± 1 không là nghiệm của phương trình.

Do đó phương trình đã cho tương đương với:

$$2\sqrt[2009]{\frac{1+x}{1-x}}+\sqrt[2009]{\frac{1-x}{1+x}}+3=0 \quad (1)$$

Đặt: $\sqrt[2009]{\frac{1+x}{1-x}}=t$. Suy ra: $\sqrt[2009]{\frac{1-x}{1+x}}=\frac{1}{t}$

Phương trình (1) trở thành:

$$2t+\frac{1}{t}+3=0 \Leftrightarrow 2t^2+3t+1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-1 \\ t=-\frac{1}{2}\end{array}\right.$$

+ Với t = - 1: $\sqrt[2009]{\frac{1+x}{1-x}}=-1 \Rightarrow \frac{1+x}{1-x}=-1$: Phương trình vô nghiệm

+ Với $t=-\frac{1}{2}$: $\sqrt[2009]{\frac{1+x}{1-x}}=-\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1+x}{1-x}=-\frac{1}{2^{2009}} \Rightarrow x=\frac{1+2^{2009}}{1-2^{2009}}$

VD2. Giải phương trình sau:

$$x^4+\sqrt{x^2+2009}=2009$$

HD. Cách 1. $x^4+\sqrt{x^2+2009}=2009 \Leftrightarrow x^4+x^2+\frac{1}{4}=x^2+2009-\sqrt{x^2+2009}+\frac{1}{4}$

$$\Leftrightarrow \left(x^2+\frac{1}{2}\right)^2=\left(\sqrt{x^2+2009}-\frac{1}{2}\right)^2$$

Cách 2:

Đặt (1) y = $\sqrt{x^2+2009} \Rightarrow y^2=x^2+2009$ (1)

từ pt đã cho suy ra : $x^4+y=2009$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $x^4+y=y^2-x^2$

$\Leftrightarrow x^4+x^2+y-y^2=0 \Leftrightarrow (x^2+y)(x^2-y+1)=0$

Cách 3:

pt đã cho tương đương:

$x^4-(x^2+2009)+x^2+\sqrt{x^2+2009}=0 \Leftrightarrow (x^2+\sqrt{x^2+2009})(x^2-\sqrt{x^2+2009}+1)=0$

VD3. Giải phương trình:

$$\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}}=x(1+2\sqrt{1-x^2})$$

HD. ĐK: $|x|\le 1$. Đặt $x=\sin t, t\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$

Phương trình đã cho trở thành :

$\sqrt{1+cost} = \sin t(1+2cost) \Leftrightarrow \sqrt{2}cos\frac{t}{2} = \sin t + \sin 2t = 2\sin\frac{3t}{2}cos\frac{t}{2} \Leftrightarrow cos\frac{t}{2}\left(\sqrt{2}\sin\frac{3t}{2} - 1\right) = 0$

$\Leftrightarrow t = \frac{\pi}{6}$ (Do $t \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$)

Suy ra $x = \frac{1}{2}$

VD4. Giải phương trình:

$$\sqrt{1-2x} + \sqrt{1+2x} = \sqrt{\frac{1-2x}{1+2x}} + \sqrt{\frac{1+2x}{1-2x}}$$

HD. ĐK: $|x| < \frac{1}{2}$. Đặt 2x = cost, $t \in (0;\pi)$

Phương trình đã cho trở thành: $\sqrt{2}\left(\sin\frac{t}{2} + cos\frac{t}{2}\right) = \tan\frac{t}{2} + \cot\frac{t}{2}$

$\Leftrightarrow \sqrt{2}\left(\sin\frac{t}{2} + cos\frac{t}{2}\right) = \frac{2}{\sin t} \Leftrightarrow 2(1+\sin t) = \frac{4}{\sin^2 t} \Leftrightarrow \sin^3 t + \sin^2 t - 2 = 0$

$\Leftrightarrow \sin t = 1 \Rightarrow cost = 0 \Rightarrow x = 0$

VD6. Tìm m để phương trình: $\sqrt[4]{x^4 - 13x + m} + x - 1 = 0$ có đúng 1 nghiệm

(B2007-TK1)

HD. $\sqrt[4]{x^4 - 13x + m} + x - 1 = 0 \quad (1)$

(1) $\Leftrightarrow \sqrt[4]{x^4 - 13x + m} = 1 - x$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \le 1 \\ x^4 - 13x + m = (1-x)^4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \le 1 \\ 4x^3 - 6x^2 - 9x - 1 = -m \end{cases}$

ycbt $\Leftrightarrow$ đường thẳng y = – m cắt phần đồ thị f(x) = $4x^3 - 6x^2 - 9x - 1$ với x ≤ 1 tại 1 điểm

f(x) = $4x^3 - 6x^2 - 9x - 1$

TXĐ: x ≤ 1

f'(x) = $12x^2 - 12x - 9 = 3(4x^2 - 4x - 3)$

f'(x) = 0 $\Leftrightarrow 4x^2 - 4x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2} \vee x = \frac{3}{2}$

x	$-\infty$		$-1/2$		1		$3/2$		$+\infty$
f'		+	0	–		–	0	+	
f	$-\infty$	↗	CĐ	↘	-12	↘	CT	↗	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta có:

ycbt $\Leftrightarrow -m = \frac{3}{2} \vee -m < -12 \Leftrightarrow m = -\frac{3}{2} \vee m > 12$

*** Bài tập luyện tập.**

Bài 1. Giải và biện luận theo m phương trình: $\sqrt{x^2-2m}+2\sqrt{x^2-1}=x$

Bài 2. Giải và biện luận theo a phương trình: $x+\sqrt{x+\frac{1}{2}+\sqrt{x+\frac{1}{4}}}=0$

Bài 3. Giải và biện luận theo m phương trình: $\sqrt{x^2-2mx+1}+2=m$

Bài 4. Giải và biện luận theo a phương trình: $\sqrt{a+x}=a-\sqrt{a-x}$

Bài 5. Giải phương trình: 2(1 - x) $\sqrt{x^2+2x-1}=x^2-2x-1$

(ĐHDược HN - A97)

Bài 6. Giải phương trình: (4x - 1) $\sqrt{x^2+1}=x^2+2x+1$

Bài 7. Tìm m để phương trình sau có nghiệm : x - m = $\sqrt{2x^2+mx+3}$

(ĐHGTVT- A98)

Bài 8. Giải phương trình: $\sqrt{x^2-3x+3}+\sqrt{x^2-3x+6}=3$

(ĐHThương Mại - A98)

Bài 9. Giải phương trình: $\sqrt{3-x+x^2}+\sqrt{2+x-x^2}=1$

(ĐHNgoại Thương - A99)

Bài 10. Giải phương trình: $\sqrt{x+\sqrt{2x-1}}+\sqrt{x-\sqrt{2x-1}}=\sqrt{2}$

(ĐHQuy Nhơn - A99)

Bài 11. Giải và biện luận theo a phương trình:

$$2\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}=\sqrt{a-x+\sqrt{x(a+x)}}$$

Bài 12. Giải phương trình: $x^2+\sqrt{+5}=5$

Bài 13. Giải phương trình: $\sqrt{x+\sqrt{2ax-a^2}}+\sqrt{x-\sqrt{2ax-a^2}}=\sqrt{2a}$

Bài 14. Giải phương trình: $\frac{x^2}{\sqrt{3x-2}}-\sqrt{3x-2}=1-x$

Bài 15. Giải phương trình: $\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[3]{x-2}=\sqrt[3]{2x-3}$

Bài 16. Giải phương trình: $1+\frac{2}{3}\sqrt{x-x^2}=\sqrt{x}+\sqrt{1-x}$ (ĐHQGHN - A2000)

Bài 17. Giải phương trình: $\sqrt{x(x-1)}+\sqrt{x(x+2)}=2\sqrt{x^2}$ (ĐHSP2HN - A2000)

Bài 18. Giải phương trình: $\frac{1}{\sqrt{x}+1}+\frac{1}{\sqrt{x}-1}=\frac{a(x-1)}{\sqrt{x}}$ (ĐHBKHN - A2000)

Một số phương trình vô tỷ qua các kỳ thi ĐH từ 2005 - 2008

Bài 19. A2008. Tìm các giá trị tham số m để phương trình sau có đúng hai nghiệm thực phân biệt: $\sqrt[4]{2x}+\sqrt{2x}+\sqrt[4]{6-x}+\sqrt{6-x}=m$ ($m\in\mathbb{R}$)

Bài 20. A2007. Tìm m để phương ttrình sau có nghiệm thực

$$3\sqrt{x - 1} + m\sqrt{x + 1} = 2\sqrt[4]{x^2 - 1}$$

Bài 21. B2007. Chứng minh rằng với mọi giá trị dương của tham số m, phương trình sau có hai nghiệm thực phân biệt:

$$x^2 + 2x - 8 = \sqrt{m(x - 2)}$$

Bài 22. B2007-TK2. Tìm m để phương trình: $\sqrt[4]{x^2+1} - \sqrt{x} = m$ có nghiệm.

Bài 23. D2007-TK1. Tìm m để phương trình:

$$\sqrt{x-3-2\sqrt{x-4}} + \sqrt{x-6\sqrt{x-4}+5} = m \text{ có đúng 2 nghiệm}$$

Bài 24. D2007-TK2. Tìm m để hệ phương trình : $\begin{cases} 2x - y - m = 0 \\ x + \sqrt{xy} = 1 \end{cases}$ có nghiệm duy nhất

Bài 25. B2006. Tìm m để phương trình sau có hai nghiệm thực phân biệt:

$$\sqrt{x^2 + mx + 2} = 2x + 1$$

Bài 26. D2006. Giải phương trình $\sqrt{2x - 1} + x^2 - 3x + 1 = 0$ $(x \in \mathbb{R})$

Bài 27. B2006-TK1. Giải phương trình:

$$\sqrt{3x - 2} + \sqrt{x - 1} = 4x - 9 + 2\sqrt{3x^2 - 5x + 2},\ x \in \mathbb{R}$$

Bài 28. D2006-TK2. Giải phương trình:

$$x + 2\sqrt{7 - x} = 2\sqrt{x - 1} + \sqrt{-x^2 + 8x - 7},\ x \in \mathbb{R}$$

Bài 29. D2005. Giải phương trình:

$$2\sqrt{x + 2 + 2\sqrt{x + 1}} - \sqrt{x + 1} = 4 \ (x, y \in \mathbb{R})$$

IX. Hệ phương trình vô tỷ.

Phương pháp giải

1. Biến đổi về tích.

2. Giải hệ trên từng tập con của tập xác định.

3. Biến đổi tương đương.

4. Sử dụng các phương pháp giải phương trình không mẫu mực.

- Đặt ẩn phụ.
- Đối lập.
- PP hàm số dự đoán và chứng minh không còn nghiệm.
- Khảo sát hàm số.
- Dùng dấu hiệu cần và đủ.
- Dùng min max.
- PP Hình học

VD1. Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{x+y-1} = 1 \\ \sqrt{x-y+2} = 2y-2 \end{cases}$

HD. Hệ phương trình đã cho tương đương:

$$\begin{cases} x+y=2 \\ x-y+2=4y^2-8y+4 \\ y \ge 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2-y \\ 2-2y+2=4y^2-8y+4 \\ y \ge 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2-y \\ 4y^2-6y=0 \\ y \ge 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{1}{2} \\ y=\dfrac{3}{2} \end{cases}$$

VD2. Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{x^2+x+y+1} + \sqrt{y^2+x+y+1} + x + y = 18 \\ \sqrt{x^2+x+y+1} + \sqrt{y^2+x+y+1} - x - y = 2 \end{cases}$

HD. Hệ phương trình đã cho tương đương:

$$\begin{cases} \sqrt{x^2+x+y+1} + \sqrt{y^2+x+y+1} = 10 \\ x+y=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2+9} + \sqrt{y^2+9} = 10 \\ x+y=8 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2+18+2\sqrt{(x^2+9)(y^2+9)} = 100 \\ x+y=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)^2-2xy+2\sqrt{(xy)^2+9(x+y)^2-18xy+81} = 82 \\ x+y=8 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 64-2xy+2\sqrt{(xy)^2+9.64-18xy+81} = 82 \\ x+y=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{(xy)^2+9.64-18xy+81} = 9+xy \\ x+y=8 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (xy)^2+9.64-18xy+81 = 81+18xy+(xy)^2 \\ x+y=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 36xy=9.64 \\ x+y=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy=16 \\ x+y=8 \end{cases} \Leftrightarrow x=y=4.$$

VD3. Cho hệ phương trình $\begin{cases} 2x+\sqrt{y-1} = m \\ 2y+\sqrt{x-1} = m \end{cases}$

a) Giải hệ khi m = 5.

b) Giải và biện luận theo m.

HD.

Đặt $\begin{cases} u=\sqrt{x-1} \ge 0 \\ v=\sqrt{y-1} \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=u^2+1 \\ y=v^2+1 \end{cases}$, hệ phương trình đã cho trở thành:

$$\begin{cases} 2(u^2+1)+v=m \\ 2(v^2+1)+u=m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2u^2+v=m-2 & (1) \\ 2v^2+u=m-2 & (2) \end{cases}$$

Suy ra: $2(u^2-v^2)-(u-v)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} u-v=0 & (3) \\ 2(u+v)-1=0 & (4) \end{array}\right.$

• Từ (3) ta có hệ $\begin{cases} u=v & (3') \\ 2u^2+u-m+2=0 & (3'') \end{cases}$

• Từ (4) ta có hệ $\begin{cases} v = \dfrac{1}{2} - u \\ 2u^2 + \dfrac{1}{2} - u - m + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v = \dfrac{1}{2} - u & (4') \\ 4u^2 - 2u - 2m + 5 = 0 & (4'') \end{cases}$

a) m = 5:

Hệ (3')&(3") cho ta $\begin{cases} u = v \\ 2u^2 + u - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow u = v = 1$ (do u, v ≥ 0) $\Leftrightarrow$ x = y = 2

Hệ (4')&(4") cho ta:

$$\begin{cases} v = \dfrac{1}{2} - u \\ 4u^2 - 2u - 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = \dfrac{1+\sqrt{21}}{4} \\ v = \dfrac{1-\sqrt{21}}{4} \end{cases} \text{ (do u, v } \geq 0 \text{) } \Leftrightarrow \begin{cases} x = \left(\dfrac{1+\sqrt{21}}{4}\right)^2 + 1 \\ y = \left(\dfrac{1-\sqrt{21}}{4}\right)^2 + 1 \end{cases}$$

b) Giải và biện luận theo m:

• Hệ (3')&(3") cho nghiệm khi và chỉ khi (3") có nghiệm không âm. Nhưng S = $-\dfrac{1}{2} < 0$ nên nếu (3") có nghiệm thì có ít nhất một nghiệm âm. Vậy (3") có nghiệm không âm $\Leftrightarrow y_1 < 0 \leq y_2 \Leftrightarrow P \leq 0 \Leftrightarrow 2 - m \leq 0 \Leftrightarrow m \geq 2$

Khi đó $u = v = \dfrac{-1+\sqrt{8m-15}}{4} \Leftrightarrow x = y = \left(\dfrac{-1+\sqrt{8m-15}}{4}\right)^2 + 1$.

• Thấy rằng hệ (4')&(4") nếu có hai nghiệm thì $u_1 + u_2 = \dfrac{1}{2}$, mặt khác u + v = $\dfrac{1}{2}$ nên khi đó u, v cùng là nghiệm của (4"). Vậy hệ (4')&(4") cho nghiệm khi và chỉ khi (4") có hai nghiệm không âm:

Ta phải có: $\begin{cases} \Delta' = 8m - 19 \geq 0 \\ P = 5 - 2m \geq 0 \\ S = \dfrac{1}{2} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \dfrac{19}{8} \leq m \leq \dfrac{5}{2}$.

Suy ra :

$$\left[\begin{array}{l} u = \dfrac{1+\sqrt{8m-19}}{4},\ \mathrm{v} = \dfrac{1-\sqrt{8m-19}}{4} \\ u = \dfrac{1-\sqrt{8m-19}}{4},\ \mathrm{v} = \dfrac{1-\sqrt{8m-19}}{4} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \left(\dfrac{1+\sqrt{8m-19}}{4}\right)^2+1,\ \mathrm{y} = \left(\dfrac{1-\sqrt{8m-19}}{4}\right)^2+1 \\ x = \left(\dfrac{1-\sqrt{8m-19}}{4}\right)^2+1,\ \mathrm{y} = \left(\dfrac{1+\sqrt{8m-19}}{4}\right)^2+1 \end{array}\right.$$

KL: i) m < 2: Vô nghiệm

ii) $2 \le m < \dfrac{19}{8}$: $x = y = \left(\dfrac{-1+\sqrt{8m-15}}{4}\right)^2+1$

iii) $\dfrac{19}{8} \le m \le \dfrac{5}{2}$: $x = y = \left(\dfrac{-1+\sqrt{8m-15}}{4}\right)^2+1$

$$x = \left(\dfrac{1+\sqrt{8m-19}}{4}\right)^2+1,\ \mathrm{y} = \left(\dfrac{1-\sqrt{8m-19}}{4}\right)^2+1$$

$$x = \left(\dfrac{1-\sqrt{8m-19}}{4}\right)^2+1,\ \mathrm{y} = \left(\dfrac{1+\sqrt{8m-19}}{4}\right)^2+1$$

VD4. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x\sqrt{y} + y\sqrt{x} = 30 \\ x\sqrt{x} + y\sqrt{y} = 35 \end{cases}$

HD. Cách 1.

Đặt $\begin{cases} \sqrt{x} = u \ge 0 \\ \sqrt{y} = v \ge 0 \end{cases}$, hệ đã cho trở thành :

$$\begin{cases} u^2v + uv^2 = 30 \\ u^3 + v^3 = 35 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} uv(u+v) = 30 \\ (u+v)^3 - 3uv(u+v) = 35 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} uv(u+v) = 30 \\ (u+v)^3 - 90 = 35 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} uv = 6 \\ u+v = 5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u = 3, v = 2 \\ u = 2, v = 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 9, y = 4 \\ x = 4, y = 9 \end{array}\right.$$

Cách 2. Thấy rằng x = 0 không thoả. Đặt $\sqrt{y} = t\sqrt{x}, t \ge 0$. Hệ đã cho trở thành:

$$\begin{cases} xt\sqrt{x} + t^2x\sqrt{x} = 30 \\ x\sqrt{x} + t^3x\sqrt{x} = 35 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\sqrt{x}(t+t^2) = 30 \\ x\sqrt{x}(1+t^3) = 35 \end{cases} \Rightarrow \frac{t+t^2}{1+t^3} = \frac{6}{7} \Leftrightarrow \frac{t}{t^2-t+1} = \frac{6}{7}$$

VD5. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \left(1-\dfrac{12}{y+3x}\right)\sqrt{x} = 2 \\ \left(1+\dfrac{12}{y+3x}\right)\sqrt{y} = 6 \end{cases}$ (VMO - 2006 - 2007)

HD. ĐK: $x \ge 0,\ y \ge 0,\ y+3x > 0$.

Hệ phương trình đã cho tương đương $\begin{cases} 1-\dfrac{12}{y+3x} = \dfrac{2}{\sqrt{x}} \\ 1+\dfrac{12}{y+3x} = \dfrac{6}{\sqrt{y}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{x}}+\dfrac{3}{\sqrt{y}} = 1 \\ \dfrac{3}{\sqrt{y}}-\dfrac{1}{\sqrt{x}} = \dfrac{12}{y+3x} \end{cases}$

Nhân từng vế: $\dfrac{9}{y}-\dfrac{1}{x}=\dfrac{12}{y+3x} \Leftrightarrow y^2+6xy-27y^2=0 \Leftrightarrow y=3x, y=-9x$

VD6. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \sqrt{x^2+2x+22} - \sqrt{y} = y^2+2y+1 \\ \sqrt{y^2+2y+22} - \sqrt{x} = x^2+2x+1 \end{cases}$

(Thi HSG 12- QBình - 26/11/2008)

HD. Hệ phương trình đã cho:

$$\begin{cases} \sqrt{x^2+2x+22} - \sqrt{y} = y^2+2y+1 \\ \sqrt{y^2+2y+22} - \sqrt{x} = x^2+2x+1 \end{cases}$$

tương đương với:

$$\begin{cases} \sqrt{(x+1)^2+21} - \sqrt{y} = (y+1)^2 \\ \sqrt{(y+1)^2+21} - \sqrt{x} = (x+1)^2 \end{cases}$$

Đặt: $\begin{cases} u = x+1 \ge 1 \\ v = y+1 \ge 1 \end{cases}$ ta có: $\begin{cases} \sqrt{u^2+21} - \sqrt{v-1} = v^2 & (1) \\ \sqrt{v^2+21} - \sqrt{u-1} = u^2 & (2) \end{cases}$

Trừ từng vế (1)&(2):

$$\sqrt{u^2+21} - \sqrt{v^2+21} + \sqrt{u-1} - \sqrt{v-1} = v^2 - u^2$$

$$\sqrt{u^2+21} + \sqrt{u-1} + u^2 = \sqrt{v^2+21} + \sqrt{v-1} + v^2 \quad (3)$$

Xét hàm số $f(t) = \sqrt{t^2+21} + \sqrt{t-1} + t^2,\ t \ge 1$.

$$f'(t) = \frac{t}{\sqrt{t^2+21}} + \frac{1}{2\sqrt{t-1}} + 2t > 0,\ \forall t > 1.$$

f(t) liên tục phải tại t = 1.

Suy ra f(t) đồng biến trên $[1; +\infty)$

(3) $\Leftrightarrow$ f(u) = f(v); $\forall$ u, v $\in [1; +\infty)$ $\Leftrightarrow$ u = v. Thay vào (1):

$$\sqrt{u^2+21} - \sqrt{u-1} = u^2 \Leftrightarrow u^2 - \sqrt{u^2+21} + \sqrt{u-1} = 0 \quad (4)$$

Thấy rằng u = 2 thoả (4)

Xét hàm số: $g(u) = u^2 - \sqrt{u^2+21} + \sqrt{u-1},\ u \ge 1$

$$g'(u) = 2u - \frac{u}{\sqrt{u^2 + 21}} + \frac{1}{2\sqrt{u - 1}} > 0, \ \forall u > 1$$

g(u) liên tục phải tại u = 1 nên đồng biến trên $[1; +\infty)$
Suy ra u = 2 là nghiệm duy nhất của (4).
Vậy u = v = 2 là nghiệm của hệ (1)&(2) hay x = y = 1 là nghiệm của hệ đã cho.

VD7. Chứng minh rằng hệ phương trình $\begin{cases} e^x = 2007 - \dfrac{y}{\sqrt{y^2 - 1}} \\ e^y = 2007 - \dfrac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} \end{cases}$ có đúng 2 nghiệm thỏa mãn điều kiện x > 0, y > 0.

HD. Đặt: $f(t) = e^t$, $g(t) = \dfrac{t}{\sqrt{t^2 - 1}}; g'(t) = \dfrac{-1}{(t^2 - 1)^{\frac{3}{2}}} < 0, \forall |t| > 1$

Ta có f tăng trên và g giảm trên từng khoảng xác định.

Hệ phương trình (1) $\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) + g(y) = 2007 \\ f(y) + g(x) = 2007 \end{cases} \Rightarrow f(x) + g(y) = f(y) + g(x) \quad (*)$

Nếu $x > y \Rightarrow f(x) > f(y) \Rightarrow g(y) < g(x)$ (do(*)

$\Rightarrow y > x$ (do g giảm) $\Rightarrow$ vô lý.

Tương tự khi y > x cũng dẫn đến vô lý.

Do đó, (1) $\Leftrightarrow (2) \begin{cases} e^x + \dfrac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} - 2007 = 0 \\ x = y \end{cases}$

Xét: $h(x) = e^x + \dfrac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} - 2007 \quad (|x| > 1)$

Nếu $x < -1$ thì $h(x) < e^{-1} - 2007 < 0 \Rightarrow$ hệ vô nghiệm

Khi $x > 1 \Rightarrow h'(x) = e^x - \dfrac{1}{(x^2 - 1)^{\frac{3}{2}}} = e^x - (x^2 - 1)^{-\frac{3}{2}}$

$$h''(x) = e^x + \frac{3}{2}(x^2 - 1)^{-\frac{5}{2}}.2x = e^x + \frac{3x}{(x^2 - 1)^{\frac{5}{2}}} > 0$$

và $\lim\limits_{x \to 1^+} h(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = +\infty$

Vậy h(x) liên tục và có đồ thị là đường cong lõm trên $(1, +\infty)$

Do đó để chứng minh (2) có 2 nghiệm dương ta chỉ cần chứng minh tồn tại $x_0 > 1$ mà $h(x_0) < 0$

Chọn $x_0 = 2 \Rightarrow h(2) = e^2 + \dfrac{2}{\sqrt{3}} - 2007 < 0$

Suy ra: h(x) = 0 có đúng 2 nghiệm $x_1 > 1$, $x_2 > 1$

***Bài tập luyện tập:**

Bài 1. Giải và biện luận theo m hệ phương trình $\begin{cases}\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}=m\\ \sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{x^2-y^2}=m^2\end{cases}$

Bài 2. Giải và biện luận theo a hệ phương trình $\begin{cases}\sqrt{x}+\sqrt{y}=a\\ x+y-\sqrt{xy}=a\end{cases}$

Bài 3. Giải hệ phương trình $\begin{cases}2(x+y)=3\left(\sqrt[3]{x^2y}+\sqrt[3]{xy^2}\right)\\ \sqrt[3]{x^2y}+\sqrt[3]{xy^2}=6\end{cases}$

Bài 4. Tìm a để hệ phương trình sau có nghiệm $\begin{cases}\sqrt{x+1}+\sqrt{y+2}=a\\ x+y=3a\end{cases}$

Bài 5. Tìm m để hệ phương trình sau có nghiệm $\begin{cases}\sqrt{x+1}+\sqrt{y}=m\\ \sqrt{y+1}+\sqrt{x}=1\end{cases}$

Bài 6. Giải và biện luận theo m hệ phương trình: $\begin{cases}x-y=3m\\ 2y+\sqrt{xy}=0\end{cases}$

(ĐN - A98)

Bài 7. Giải hệ phương trình: $\begin{cases}\sqrt{\dfrac{x}{y}}+\sqrt{\dfrac{y}{x}}=\dfrac{7}{\sqrt{xy}}+1\\ x\sqrt{xy}+y\sqrt{xy}=78\end{cases}$

(HH - A99)

Bài 8. Giải hệ phương trình: $\begin{cases}x\sqrt{y}+y\sqrt{x}=30\\ x\sqrt{x}+y\sqrt{y}=35\end{cases}$

Bài 9. Giải và biện luận theo m hệ phương trình: $\begin{cases}\sqrt{x+y}-\sqrt{x-y}=m\\ \sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{x^2-y^2}=m^2\end{cases}$

Bài 10. Giải và biện luận theo a hệ phương trình: $\begin{cases}\sqrt{x}+\sqrt{y}=a\\ x+y-\sqrt{xy}=a\end{cases}$

Bài 11. Giải và biện luận theo m phương trình: $\begin{cases}\sqrt{x}+\sqrt{y}=a\\ x+y-\sqrt{xy}=a\end{cases}$

Bài 12. D2008. Giải hệ pt $\begin{cases}xy+x+y=x^2-2y^2\\ x\sqrt{2y}-y\sqrt{x-1}=2x-2y\end{cases}$

Bài 13. D2007-TK2.. Tìm m để hệ phương trình : $\begin{cases} 2x - y - m = 0 \\ x + \sqrt{xy} = 1 \end{cases}$ có nghiệm duy nhất.

Bài 14. A2006. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x + y - \sqrt{xy} = 3 \\ \sqrt{x+1} + \sqrt{y+1} = 4 \end{cases}$ $(x, y \in \mathbb{R})$

Bài 15. A2005-TK2. Giải hệ phương trình : $\begin{cases} \sqrt{2x+y+1} - \sqrt{x+y} = 1 \\ 3x + 2y = 4 \end{cases}$

Bài 16. B2005-TK1. Giải hệ phương trình : $\begin{cases} \sqrt{2x+y+1} - \sqrt{x+y} = 1 \\ 3x + 2y = 4 \end{cases}$

Bài 17. B2005. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} \sqrt{x - 1} + \sqrt{2 - y} = 1 \\ 3\log_9(9x^2) - \log_3 y^3 = 3 \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

Bài 18. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \sqrt{x+5} + \sqrt{y+5} = 6 \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = 4 \end{cases}$

Bài 19. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} xy + x + y = x^2 - 2y^2 \\ x\sqrt{2y} - y\sqrt{x-1} = 2x - 2y \end{cases}$

Bài 20. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2 + y^2 + \dfrac{2xy}{x+y} = 1 \\ \sqrt{x+y} = x^2 - y \end{cases}$

Bài 21. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x - 2y - \sqrt{xy} = 0 \\ \sqrt{x-1} + \sqrt{4y-1} = 2 \end{cases}$

Bài 22. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \sqrt{x^2 + 91} = \sqrt{y-2} + y^2 \ (1) \\ \sqrt{y^2 + 91} = \sqrt{x-2} + x^2 \ (2) \end{cases}$

Bài 23. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \log_2 x + 3\sqrt{5 - \log_3 y} = 5 \\ 3\sqrt{\log_2 x - 1} - \log_3 y = -1 \end{cases}$