

TÍCH PHÂN VÀ ỨNG DỤNG

Trong các đề thi tốt nghiệp THPT và Tuyển sinh vào Đại học và Cao đẳng thường có các bài toán tích phân. Bài viết này xin được chuyển đến các bạn đọc chuẩn bị thi vào các trường Đại học và Cao đẳng một hệ thống các phương pháp tính tích phân mà tôi tích lũy được và sắp xếp theo một cách riêng mình, một số bất đẳng thức tích phân và một số áp dụng tích phân tính diện tích và thể tích.

1. Tính trực tiếp nguyên hàm rồi áp dụng công thức Niuton- Lépnit.

Tính trực tiếp nguyên hàm có một thuận lợi khi ta không phải để ý đến tập xác định của hàm dưới dấu tích phân.

VD1. Tính $I = \int_0^1 \frac{dx}{(1+x^n)^{\sqrt[n]{1+x^n}}}, n \in \mathbb{N}, n \geq 2.$ (ĐH Thái Nguyên - A 2000)

Biến đổi sau $I = \int_0^1 \frac{dx}{x^n \left(1 + \frac{1}{x^n}\right) x^n \sqrt[n]{1 + \frac{1}{x^n}}}$ là không chấp nhận được.

Nhưng nếu đặt $I(x) = \int \frac{dx}{(1+x^n)^{\sqrt[n]{1+x^n}}}$ thì các biến đổi sau là hợp lý và cho phép được:

$$\begin{aligned} I(x) &= \int \frac{dx}{(1+x^n)^{\sqrt[n]{1+x^n}}} = \int \frac{dx}{x^n \left(1 + \frac{1}{x^n}\right) x^n \sqrt[n]{1 + \frac{1}{x^n}}} = \int \frac{x^{-n-1}}{\left(1 + \frac{1}{x^n}\right)^{1+\frac{1}{n}}} dx = \int \left(1 + \frac{1}{x^n}\right)^{-1-\frac{1}{n}} x^{-n-1} dx \\ &= -\frac{1}{n} \int \left(1 + \frac{1}{x^n}\right)^{-1-\frac{1}{n}} d\left(1 + \frac{1}{x^n}\right) = \left(1 + \frac{1}{x^n}\right)^{-\frac{1}{n}} + C = \frac{x}{\sqrt[n]{1+x^n}} + C. \end{aligned}$$

$$\text{Suy ra } I(x) = \int \frac{dx}{(1+x^n)^{\sqrt[n]{1+x^n}}} = \frac{x}{\sqrt[n]{1+x^n}} \Big|_0^1 = \frac{1}{\sqrt[n]{2}}$$

Nhưng do chương trình không dùng hàm số ngược, nên một số nguyên hàm không thể tính được.

VD2. Tính $I(x) = \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} (a > 0)$

Đặt $x = a \sin t \Rightarrow dx = a \cos t dt$

$$\Rightarrow I(x) = \int \frac{a \cos t dt}{\sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 t}} = \int \frac{dt}{\cos t} = \int \frac{\cos t dt}{1 - \sin^2 t} = \int \frac{d(\sin t)}{(1 - \sin t)(1 + \sin t)}$$

$$= \frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{1-\sin t} + \frac{1}{1+\sin t} \right) d(\sin t) = \frac{1}{2} \ln(1-\sin^2 t) + C$$

Một quá trình thật đẹp, tiếc rằng không rút được t theo x để có nguyên hàm biến x.

2. Áp dụng một tính chất của nguyên hàm.

Nguyên hàm có tính chất:

$$\text{Nếu } \int f(x)dx = F(x) + C \text{ thì } \int f(u)du = F(u) + C \quad (1)$$

Đặc biệt: Nếu $\int f(x)dx = F(x) + C$ thì $\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C, (a \neq 0)$

Ví dụ 1: Tính $I = \int_1^2 \frac{(1+x)^{2006}}{x^{2008}} dx$.

$$\text{Ta có: } I = -\int_1^2 \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{2006} d\left(1 + \frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{2007} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{2007} \Big|_1^2 = \frac{1}{2007} \left(2^{2007} - \left(\frac{3}{2}\right)^{2007}\right)$$

Ví dụ 2: Tính $I = \int_1^e \frac{\ln x}{x(\ln^2 x + 1)} dx$. (ĐH Cần Thơ - B1999)

$$\text{Ta có: } I = \frac{1}{2} \int_1^e \frac{d(\ln^2 x + 1)}{\ln^2 x + 1} = \frac{1}{2} \ln(\ln^2 x + 1) \Big|_1^e = \frac{1}{2} (\ln 2 - 0) = \ln \sqrt{2}.$$

Ví dụ 3: Tính $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1 - 2\sin^2 x}{1 + \sin 2x} dx$, (ĐH, CĐ - B2003)

$$\text{Ta có: } I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos 2x}{1 + \sin 2x} dx = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d(1 + \sin 2x)}{1 + \sin 2x} = \frac{1}{2} \ln(1 + \sin 2x) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \ln \sqrt{2}$$

3. Phương pháp đổi biến.

3.1. Phép đổi biến "trông thấy" $\varphi(x), \varphi'(x)$:

Tính $I = \int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)dx$, $\varphi(x)$ liên tục và đơn điệu trên $[a; b]$.

Ở đây ta "nhìn thấy" cả $\varphi(x)$ và $\varphi'(x)$

Đặt $\varphi(x) = t$, khi đó: $I = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)dt$.

Ví dụ 1: Tính $I = \int_0^1 \frac{x^3}{x^2 + 1} dx$.

$$\text{Ta có: } I = \int_0^1 \left(x - \frac{x}{x^2 + 1}\right) dx = \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{x^2 + 1} dx = \frac{1}{2} - \int_0^1 \frac{x}{x^2 + 1} dx$$

$$\text{Đặt } t = x^2 + 1 \Rightarrow dt = 2x dx \Rightarrow I = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{dt}{t} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \ln t \Big|_1^2 = \frac{1}{2}(1 - \ln 2)$$

Ví dụ 2: Tính $I = \int_0^{\ln 3} \frac{e^x dx}{\sqrt{(e^x + 1)^3}}$, (ĐH, CĐ - TK2 - 2002)

$$\text{Đặt } t = e^x + 1 \Rightarrow dt = e^x dx \Rightarrow I = \int_2^4 \frac{dt}{\sqrt{t^3}} = \int_2^4 t^{-\frac{3}{2}} dt = -2 \frac{1}{\sqrt{t}} \Big|_2^4 = \sqrt{2} - 1.$$

Ví dụ 3: Tính $I = \int_1^e \frac{\sqrt{1 + \ln^2 x} \cdot \ln x}{x} dx$.

$$\text{Đặt } t = 1 + \ln^2 x \Rightarrow dt = \frac{2 \ln x}{x} dx \Rightarrow I = \frac{1}{2} \int_1^2 \sqrt{t} dt = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} t \sqrt{t} \Big|_1^2 = \frac{1}{3}(2\sqrt{2} - 1)$$

Thực ra các tích phân như thế không cần đổi biến mà chỉ cần áp dụng (1) vì

$$I = \int_a^b f(\varphi(x)) \varphi'(x) dx = I = \int_a^b f(\varphi(x)) d(\varphi(x)).$$

Ví dụ:

$$I = \int_0^1 \frac{x^3}{x^2 + 1} dx = \int_0^1 \left(x - \frac{x}{x^2 + 1} \right) dx = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{d(x^2 + 1)}{x^2 + 1}$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) \Big|_0^1 = \frac{1}{2}(1 - \ln 2)$$

$$I = \int_0^{\ln 3} \frac{e^x dx}{\sqrt{(e^x + 1)^3}} = \int_0^{\ln 3} \frac{d(e^x + 1)}{\sqrt{(e^x + 1)^3}} = \int_0^{\ln 3} (e^x + 1)^{-\frac{3}{2}} d(e^x + 1) = -2(e^x + 1)^{-\frac{1}{2}} \Big|_0^{\ln 3} = \sqrt{2} - 1$$

$$I = \int_1^e \frac{\sqrt{1 + \ln^2 x} \cdot \ln x}{x} dx = \frac{1}{2} \int_1^e \sqrt{1 + \ln^2 x} \cdot d(1 + \ln^2 x)$$

$$= \frac{1}{3} (1 + \ln^2 x) \sqrt{1 + \ln^2 x} \Big|_1^e = \frac{1}{3}(2\sqrt{2} - 1)$$

3.2. Phép đổi biến "không trông thấy" $\varphi(x)$, $\varphi'(x)$.

$$\text{Tính } I = \int_a^b f(x) dx.$$

$$\text{Đặt } \varphi(x) = t, \varphi(x) \text{ liên tục và đơn điệu trên } [a; b], \text{ khi đó: } I = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} g(t) dt.$$

Ví dụ 1: (Tích phân cơ bản)

$$\text{Tính } I = \int_0^a \frac{1}{\sqrt{a^2 + x^2}} dx, (a > 0). \quad (I)$$

$$\text{Đặt: } x + \sqrt{a^2 + x^2} = t \Rightarrow \left(1 + \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} \right) dx = dt \Rightarrow \frac{x + \sqrt{a^2 + x^2}}{\sqrt{a^2 + x^2}} dx = dt$$

$$\Rightarrow \frac{t}{\sqrt{a^2 + x^2}} dx = dt \Rightarrow \frac{dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \frac{dt}{t}.$$

Khi đó: $I = \int_a^{a(1+\sqrt{2})} \frac{dt}{t} = \ln t \Big|_a^{a(1+\sqrt{2})} = \ln(1 + \sqrt{2})$

* **Chú ý:** Tích phân này có thể đổi biến $x = \tan t$

Ví dụ 2: (Tích phân cơ bản)

$$\text{Tính } I = \int_{\sqrt{2}a}^{2a} \frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}} \cdot dx, \quad (a > 0). \quad (\text{II})$$

Tương tự VD6, đặt: $x + \sqrt{x^2 - a^2} = t$

* **Chú ý:** Tích phân này có thể đổi biến $x = \frac{a}{\cos t}$

Ví dụ 3: Tính $I = \int_{\sqrt{5}}^{2\sqrt{5}} \frac{dx}{x\sqrt{x^2 + 4}}$, (ĐH, CĐ - A2003)

Đặt $t = \sqrt{x^2 + 4}$. Suy ra $I = \int_3^4 \frac{dt}{t^2 - 4} = \frac{1}{4} \int_3^4 \left(\frac{1}{t-2} - \frac{1}{t+2} \right) dt = \frac{1}{4} \ln \frac{t-2}{t+2} \Big|_3^4 = \frac{1}{4} \ln \frac{5}{3}$

Ví dụ 4: Tính $I = \int_0^1 x^3 \sqrt{1-x^2} dx$, (ĐH, CĐ- TK2- A2003)

Đặt $t = \sqrt{1-x^2} \Rightarrow I = \int_0^1 t^2(1-t^2)dt = \left(\frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{5}t^5 \right) \Big|_0^1 = \frac{2}{15}$.

• Tích phân này có nhiều cách tính:

Cách 2: Đặt $t = 1 - x^2$

Cách 3: Đặt $t = x^2$

Cách 4: Đặt $x = \cos t \Rightarrow I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t \cos^3 t dt$.

Cách 4.1. Đặt $\sin t = u \Rightarrow \cos t dt = du \Rightarrow I = \int_0^1 u^2(1-u^2)du$

Cách 4.2. $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t (1 - \sin^2 t) d(\sin t)$.

Cách 4.3. $I = \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2t \cdot \cos t dt = \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos 4t}{2} \cos t dt = \frac{1}{8} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t dt - \frac{1}{8} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 4t \cdot \cos t dt$

Cách 5: $I = \frac{1}{2} \int_0^1 (1-x^2-1)\sqrt{1-x^2} d(1-x^2) = \frac{1}{2} \int_0^1 (1-x^2)^{\frac{3}{2}} d(1-x^2) - \frac{1}{2} \int_0^1 \sqrt{1-x^2} d(1-x^2)$

Ví dụ 5: Tính $I = \int_1^2 \frac{x}{1+\sqrt{x-1}} dx$, (ĐH, CĐ - A2004)

Đặt: $t = 1 + \sqrt{x-1} \Rightarrow I = \int_1^2 \frac{t^2 - 2t + 2}{t} \cdot 2(t-1) dt = \frac{11}{3} - 4 \ln 2$

Ví dụ 6: Tính $I = \int_1^e \frac{\sqrt{1+3\ln x} \cdot \ln x}{x} dx$. (ĐH, CĐ - B2004)

Đặt $t = \sqrt{1+3\ln x}$. Ta có: $I = \frac{2}{3} \int_1^2 \frac{t^2 - 1}{3} t^2 dt = \frac{2}{9} \int_1^2 (t^4 - t^2) dt = \frac{116}{135}$

Ví dụ 7: Tính $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x + \sin x}{\sqrt{1+3\cos x}} dx$, (ĐH, CĐ - A2005)

Đặt $t = \sqrt{1+3\cos x} \Rightarrow I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(2\cos x + 1)\sin x}{\sqrt{1+3\cos x}} dx = \frac{2}{9} \int_1^2 (2t^2 + 1) dt = \frac{34}{27}$

3.3. Phép đổi biến $x = \varphi(t)$:

Tính $I = \int_a^b f(x) dx$.

đặt $x = \varphi(t)$. Suy ra $I = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t) dt$. $\varphi(t)$ liên tục và đơn điệu trên $[\alpha; \beta]$

Ví dụ 1: (Tích phân cơ bản)

$$\text{Tính } I = \int_0^{\frac{a}{2}} \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx, \quad (a > 0). \quad \text{(III)}$$

Đặt $x = a \sin t$

Ví dụ 2: (Tích phân cơ bản)

$$\text{Tính } I = \int_0^a \frac{1}{x^2 + a^2} dx, \quad (a > 0). \quad \text{(IV)}$$

Đặt $x = a \tan t$

Ví dụ 3: (Tích phân cơ bản)

$$\text{Tính } I = \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx, \quad (a > 0). \quad \text{(V)}$$

Đặt $x = a \sin t$

Ví dụ 4: (Tích phân cơ bản)

$$\text{Tính } I = \int_0^a \sqrt{a^2 + x^2} dx, \quad (a > 0) \quad \text{(VI)}$$

Đặt $x = a \tan t$

Ví dụ 5: (Tích phân cơ bản)

$$\text{Tính } I = \int_a^{2a} \sqrt{x^2 - a^2} \cdot dx, \quad (a > 0). \quad (\text{VII})$$

Cách 1. Đặt $x = \frac{a}{\cos t}$

$$\begin{aligned} * \text{ Chú ý: Có thể đặt } \sqrt{x^2 - a^2} = t &\Rightarrow \frac{x}{\sqrt{x^2 - a^2}} dx = dt \\ &\Rightarrow x dx = \sqrt{x^2 - a^2} dt = t dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow dx &= \frac{t dt}{\sqrt{t^2 + a^2}} \Rightarrow I = \int_0^{a\sqrt{3}} \frac{t^2 dt}{\sqrt{t^2 + a^2}} = \int_0^{a\sqrt{3}} \frac{(t^2 + a^2 - a^2) dt}{\sqrt{t^2 + a^2}} = \\ &= \int_0^{a\sqrt{3}} \sqrt{t^2 + a^2} dx - \int_0^{a\sqrt{3}} \frac{a^2 dt}{\sqrt{t^2 + a^2}} \quad (\text{Xem (I) và (VI)}) \end{aligned}$$

Có thể biến đổi:

$$I = \int_a^{2a} \sqrt{x^2 - a^2} \cdot dx = \int_a^{2a} \frac{x^2 - a^2}{\sqrt{x^2 - a^2}} \cdot dx = \int_a^{2a} \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - a^2}} \cdot dx - \int_a^{2a} \frac{a^2}{\sqrt{x^2 - a^2}} \cdot dx$$

$$\text{Trong đó } \int_a^{2a} \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - a^2}} \cdot dx = \int_a^{2a} x d(\sqrt{x^2 - a^2})$$

$$\text{còn } \int_a^{2a} \frac{a^2}{\sqrt{x^2 - a^2}} \cdot dx \quad \text{xem dạng III.}$$

Ví dụ 6: Tính $I = \int_0^1 x^2 \sqrt{1 - x^2} dx,$

$$\text{Đãn } = \sin t \Rightarrow \cos t dt = dx \Rightarrow I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t \cos^2 t dt$$

$$= \frac{1}{8} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 4t) dt = \frac{1}{8} \left(t - \frac{1}{4} \sin 4t \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{16}$$

4. Đổi biến về tích phân ban đầu hoặc về một tích phân có tổng với tích phân ban đầu là một tích phân tính được.

Ví dụ 1: Tính $I = \int_0^{\pi} \frac{\sin 4x}{1 + \cos^2 x} \cdot dx$

$$\text{Đặt } x = \pi - t \Rightarrow I = \int_0^{\pi} \frac{\sin 4(\pi - t)}{1 + \cos^2 t} \cdot dx = - \int_0^{\pi} \frac{\sin 4t}{1 + \cos^2 t} \cdot dx = -I$$

$$\Rightarrow I = 0.$$

Ví dụ 2: Tính $I = \int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} \cdot dx$

$$\text{Đặt } x = \pi - t \Rightarrow I = \int_0^{\pi} \frac{(\pi - t)\sin t}{1 + \cos^2 t} \cdot dx = \pi \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{1 + \cos^2 x} \cdot dx - I$$

$$\Rightarrow I = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{1 + \cos^2 x} \cdot dx$$

$$\text{Đặt } \cos x = t \Rightarrow I = \frac{\pi}{2} \int_{-1}^1 \frac{dt}{1 + t^2} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi^2}{4}$$

Ví dụ 3: Tính $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^6 x \cdot dx}{\sin^6 x + \cos^6 x}$ (ĐH Huế - A2000)

$$\text{Đặt } t = \frac{\pi}{2} - x. \text{ Suy ra: } I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^6 t \cdot dt}{\sin^6 t + \cos^6 t} \Rightarrow 2I = I + I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dt = \frac{\pi}{2}$$

5. Phương pháp tích phân từng phần.

5.1. Tích phân từng phần một lần.

Ví dụ 1: Tính $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{1 + \cos 2x} \cdot dx$, (ĐH, CĐ - TK1 - A2003)

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } I &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{2\cos^2 x} \cdot dx = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} x d(\tan x) = \frac{1}{2} \left(x \tan x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x dx \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{4} + \ln |\cos x| \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} \right) = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4} \ln 2 \end{aligned}$$

Ví dụ 2: Tính $I = \int_{\ln 2}^{\ln 5} \frac{e^{2x} dx}{\sqrt{e^x - 1}}$, (ĐH, CĐ - TK1 - B2003)

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } I &= 2 \int_{\ln 2}^{\ln 5} e^x d(\sqrt{e^x - 1}) = 2 e^x \sqrt{e^x - 1} \Big|_{\ln 2}^{\ln 5} - 2 \int_{\ln 2}^{\ln 5} e^x \sqrt{e^x - 1} \cdot dx \\ &= 16 - 2 \int_{\ln 2}^{\ln 5} \sqrt{e^x - 1} \cdot d(e^x - 1) = 16 - \frac{4}{3} (e^x - 1) \sqrt{e^x - 1} \Big|_{\ln 2}^{\ln 5} = \frac{20}{3} \end{aligned}$$

Ví dụ 3: Tính $I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x \ln(\sin x) dx$

$$\text{Ta có } I = \sin x \ln(\sin x) \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} - \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \frac{1}{\sqrt{2}} - \left(\sin \frac{\pi}{2} - \sin \frac{\pi}{4} \right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}(1 - \ln \sqrt{2}) - 1$$

Ví dụ 4: Tính $I = \int_1^e \sqrt{x} \ln x dx$

$$\text{Ta có } I = \frac{2}{3} x\sqrt{x} \ln x \Big|_1^e - \int_1^e \sqrt{x} dx = \frac{2}{3} e\sqrt{e} - \frac{2}{3} x\sqrt{x} \Big|_1^e = \frac{2}{3}$$

5.2. Tích phân từng phần nhiều lần.

Ví dụ 1: Tính $I = \int_0^1 x^2 \sin^2 \pi x dx$

$$\begin{aligned} \text{Ta có } I &= \int_0^1 x^2 \cdot \frac{1 - \cos 2\pi x}{2} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 x^2 dx - \frac{1}{2} \int_0^1 x^2 \cos 2\pi x dx \\ &= \frac{x^3}{6} \Big|_0^1 - \frac{1}{4\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 d(\sin 2\pi x) = \frac{1}{6} - \frac{1}{4\pi} (x^2 \sin 2\pi x \Big|_0^1 - 2 \int_0^1 x \sin 2\pi x dx) \\ &= \frac{1}{6} - \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} x d(\cos 2\pi x) = \frac{1}{6} - \frac{1}{4\pi^2} (x \cos 2\pi x \Big|_0^1 - \int_0^1 \cos 2\pi x dx) \\ &= \frac{1}{6} - \frac{1}{4\pi^2} + \frac{1}{8\pi^3} \sin(2\pi x) \Big|_0^1 = \frac{1}{6} - \frac{1}{4\pi^2} \end{aligned}$$

Ví dụ 2: Tính $I = \int_0^1 \sqrt{x} e^{\sqrt{x}} dx$.

$$\text{Đặt } \sqrt{x} = t \Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{x}} dx = dt \Rightarrow dx = 2t dt$$

$$\text{Suy ra } I = 2 \int_0^1 t^2 e^t dt = 2(t^2 e^t \Big|_0^1 - 2 \int_0^1 t e^t dt) = 2e - 4(t e^t \Big|_0^1 - \int_0^1 e^t dt) = 2(e - 2).$$

5.3. Tích phân từng phần làm xuất hiện tích phân ban đầu.

$$\begin{aligned} \text{VD1: } I &= \int_0^{\pi} \cos^3 x \cdot \cos 3x dx = \frac{1}{3} \int_0^{\pi} \cos^3 x d(\sin 3x) \\ &= \frac{1}{3} (\cos^3 x \cdot \sin 3x \Big|_0^{\pi} + 3 \int_0^{\pi} \cos^2 x \cdot \sin x \cdot \sin 3x dx) = \int_0^{\pi} \cos^2 x \cdot \sin x \cdot \sin 3x dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \cos^2 x (\cos 2x - \cos 4x) dx = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \cos^2 x \cdot \cos 2x dx - \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \cos^2 x \cdot \cos 4x dx \\ &= \frac{1}{4} \int_0^{\pi} (1 + \cos 2x) \cos 2x dx - \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \cos^2 x (\cos 3x \cdot \cos x - \sin 3x \cdot \sin x) dx = \\ &= \frac{1}{4} \int_0^{\pi} (1 + \cos 2x) \cos 2x dx - \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \cos^3 x \cdot \cos 3x dx + \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \cos^2 x \cdot \sin x \cdot \sin 3x dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{4} \int_0^{\pi} (1 + \cos 2x) \cos 2x \, dx - \frac{1}{2} I + \frac{1}{2} I = \frac{1}{4} \int_0^{\pi} \cos 2x \, dx + \frac{1}{8} \int_0^{\pi} (1 + \cos 4x) \, dx \\
&= \frac{1}{8} \sin 2x \Big|_0^{\pi} + \frac{\pi}{8} + \frac{1}{32} \sin 8x \Big|_0^{\pi} = \frac{\pi}{8}
\end{aligned}$$

Ví dụ 2: $I = \int_0^1 e^x \sin^2 \pi x \, dx$,

Ta có: $I = \int_0^1 \sin^2 \pi x \cdot de^x = e^x \sin^2 \pi x \Big|_0^1 - \int_0^1 2\pi \sin \pi x \cdot \cos \pi x \cdot e^x \, dx = -\pi \int_0^1 \sin 2\pi x \cdot de^x$

$$J = \int_0^1 \sin 2\pi x \cdot de^x = e^x \sin 2\pi x \Big|_0^1 - 2\pi \int_0^1 \cos 2\pi x \cdot de^x = -2\pi e^x \cos 2\pi x \Big|_0^1 - 4\pi^2 \int_0^1 e^x \sin 2\pi x \, dx$$

$$= -2\pi(e - 1) - 4\pi^2 J$$

$$\Rightarrow J = \frac{2\pi(1 - e)}{1 + 4\pi^2} \Rightarrow I = \frac{2\pi^2(e - 1)}{1 + 4\pi^2}$$

Ví dụ 3: $I = \int_1^{e^{\frac{\pi}{2}}} \cos^2(\ln x) \, dx$.

Ta có: $I = \frac{1}{2} \int_1^{e^{\frac{\pi}{2}}} (1 + \cos(2\ln x)) \, dx = \frac{1}{2}(e^{\frac{\pi}{2}} - 1) + \frac{1}{2} \int_1^{e^{\frac{\pi}{2}}} \cos(2\ln x) \, dx$

Đặt $J = \frac{1}{2} \int_1^{e^{\frac{\pi}{2}}} \cos(2\ln x) \, dx = \frac{1}{2} x \cos(2\ln x) \Big|_1^{e^{\frac{\pi}{2}}} + \int_1^{e^{\frac{\pi}{2}}} \sin(2\ln x) \, dx$

$$= -\frac{1}{2}(e^{\frac{\pi}{2}} + 1) + x \sin(2\ln x) \Big|_1^{e^{\frac{\pi}{2}}} - 2 \int_1^{e^{\frac{\pi}{2}}} \cos(2\ln x) \, dx$$

$$= -\frac{1}{2}(e^{\frac{\pi}{2}} + 1) - 4J.$$

Suy ra: $J = -\frac{1}{10}(e^{\frac{\pi}{2}} + 1) \Rightarrow I = \frac{1}{2}(e^{\frac{\pi}{2}} - 1) - \frac{1}{10}(e^{\frac{\pi}{2}} + 1) = \frac{1}{5}(2e^{\frac{\pi}{2}} - 3)$

5.4. Tích phân từng phần làm xuất hiện một tích phân triệt tiêu một tích phân.

Ví dụ 1: Tính $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1 + \sin x)e^x}{1 + \cos x} \, dx$, (ĐH Dược HN - A2000)

Ta có: $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^x}{2\cos^2 \frac{x}{2}} \, dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^x \sin x}{1 + \cos x} \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x d\left(\operatorname{tg} \frac{x}{2}\right) + \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \operatorname{tg} \frac{x}{2} \, dx$

$$= e^x \operatorname{tg} \frac{x}{2} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \operatorname{tg} \frac{x}{2} \cdot dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \operatorname{tg} \frac{x}{2} \cdot dx = e^x \operatorname{tg} \frac{x}{2} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = e^{\frac{\pi}{2}}$$

Ví dụ 2: Tính $I = \int_{\frac{1}{2}}^2 \left(1 + x - \frac{1}{x}\right) e^{x+\frac{1}{x}} \cdot dx$,

Ta có:

$$\begin{aligned} I &= \int_{\frac{1}{2}}^2 e^{x+\frac{1}{x}} \cdot dx + \int_{\frac{1}{2}}^2 \left(x - \frac{1}{x}\right) e^{x+\frac{1}{x}} \cdot dx = x e^{x+\frac{1}{x}} \Big|_{\frac{1}{2}}^2 - \int_{\frac{1}{2}}^2 x \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) e^{x+\frac{1}{x}} \cdot dx + \int_{\frac{1}{2}}^2 \left(x - \frac{1}{x}\right) e^{x+\frac{1}{x}} \cdot dx \\ &= 2e^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}e^{\frac{3}{2}} - \int_{\frac{1}{2}}^2 \left(x - \frac{1}{x}\right) e^{x+\frac{1}{x}} \cdot dx + \int_{\frac{1}{2}}^2 \left(x - \frac{1}{x}\right) e^{x+\frac{1}{x}} \cdot dx = 2e^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}e^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2}e\sqrt{e} \end{aligned}$$

Ví dụ 3: Tính $I = \int_0^1 \frac{x e^x}{(1+x)^2} dx$,

Ta có:

$$I = \int_0^1 \left(\frac{1}{1+x} - \frac{1}{(1+x)^2} \right) e^x dx = \int_0^1 \frac{e^x dx}{1+x} - \int_0^1 \frac{e^x dx}{(1+x)^2} = \frac{e^x}{1+x} \Big|_0^1 + \int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{e^x dx}{(1+x)^2} - \int_0^1 \frac{e^x dx}{(1+x)^2} = \frac{e}{2} - 1.$$

Ví dụ 4: Tính $I = \int_{\frac{1}{2}}^e \frac{1+x \ln x}{x} e^x dx$.

Ta có $I = \int_{\frac{1}{2}}^e \frac{1}{x} e^x dx + \int_{\frac{1}{2}}^e e^x \ln x dx = e^x \ln x \Big|_{\frac{1}{2}}^e - \int_{\frac{1}{2}}^e \frac{1}{x} e^x dx + \int_{\frac{1}{2}}^e \frac{1}{x} e^x dx = e^e$

6. Biến đổi thành tổng:

Ví dụ 1: Tính $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x \cdot dx}{\sin x + \cos x}$

Ta có $I = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\sin x + \cos x) + (\sin x - \cos x) \cdot dx}{\sin x + \cos x}$

$$= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d(\sin x + \cos x)}{\sin x + \cos x} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \ln(\sin x + \cos x) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}$$

Ví dụ 2: Tính $I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\sin x \cdot \sin(x + \frac{\pi}{6})}$

$$\text{Ta có } I = \frac{1}{\sin \frac{\pi}{6}} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \left[\cot x - \cot \left(x + \frac{\pi}{6} \right) \right] dx = 2 \ln \frac{\sin x}{\sin \left(x + \frac{\pi}{6} \right)} \Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} = 2(2 \ln \sqrt{3} - \ln 2)$$

Ví dụ 3: Tính $I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x}$

$$\text{Ta có } I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{1}{\sin^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x} \right) dx$$

Ví dụ 4: Tính $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos 3x dx$

$$\text{Ta có } I = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin 4x - \sin 2x) dx$$

Ví dụ 5: Tính $I = \int_0^1 \frac{1}{(x+1)(x+2)} dx$

$$\text{Ta có } I = \int_0^1 \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} \right) dx$$

7. Tính đồng thời hai tích phân.

Để tính $I = \int_a^b f(x) dx$, ta "huy động thêm" $J = \int_a^b g(x) dx$ sao cho $I + J$ và $I - J$ đều

tính được hoặc đổi biến thích hợp để có $I = \int_a^b g(x) dx$.

Ví dụ 1: Tính $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x \cdot dx}{\sin x + \cos x}$

$$\text{Gọi } J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x \cdot dx}{\sin x + \cos x} \quad . \text{ Ta có } I + J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\sin x + \cos x) dx}{\sin x + \cos x} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{2}$$

$$I - J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\sin x - \cos x) dx}{\sin x + \cos x} = - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d(\sin x - \cos x)}{\sin x + \cos x} = - \ln(\sin x + \cos x) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 0$$

Ví dụ 2: Tính $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos^2 x dx$

$$\text{Gọi } J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin^2 x dx$$

$$I + J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x dx = \frac{x^2}{2} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^2}{8}$$

$$I - J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos 2x dx = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} x d(\sin 2x) = \frac{1}{2} x \sin 2x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x dx = \frac{1}{4} \cos 2x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{1}{2}$$

$$\text{Suy ra } I = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi^2}{8} - \frac{1}{2} \right) = \frac{\pi^2 - 4}{32}$$

8. Áp dụng trực tiếp cách chứng minh một số kết quả tích phân.

8.1. Nếu $f(x)$ là hàm số lẻ thì $\int_{-a}^a f(x) dx = 0$.

Nếu $f(x)$ là hàm số chẵn thì $\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$

Chứng minh ở đây là: $\int_{-a}^a f(x) dx = \int_{-a}^0 f(x) dx + \int_0^a f(x) dx$.

Đặt $t = -x$. Khi đó: $\int_{-a}^0 f(x) dx = - \int_0^a f(x) dx$, nếu $f(x)$ là hàm số lẻ.

$\int_{-a}^0 f(x) dx = \int_0^a f(x) dx$, nếu $f(x)$ là hàm số chẵn.

Ví dụ: Tính $I = \int_{-1}^1 \left[\ln(x + \sqrt{1+x^2}) \right]^3 dx$.

Ta có: $I = \int_{-1}^0 \left[\ln(x + \sqrt{1+x^2}) \right]^3 dx + \int_0^1 \left[\ln(x + \sqrt{1+x^2}) \right]^3 dx$ (1)

Đặt $t = -x$. Khi đó $\int_{-1}^0 \left[\ln(x + \sqrt{1+x^2}) \right]^3 dx = \int_0^1 \left[\ln(-t + \sqrt{1+t^2}) \right]^3 dt$
 $= \int_0^1 \left[\ln \frac{1}{t + \sqrt{1+t^2}} \right]^3 dt = \int_0^1 \left[-\ln(t + \sqrt{1+t^2}) \right]^3 dt = - \int_0^1 \left[\ln(-x + \sqrt{1+x^2}) \right]^3 dx$

Thay vào (1) ta có: $I = \int_{-1}^1 \left[\ln(x + \sqrt{1+x^2}) \right]^3 dx = 0$.

• Để ý rằng ở đây đã áp dụng trực tiếp cách chứng minh mà không phải trải qua hai bước: Chứng minh tính chất, chứng minh hàm dưới dấu tích phân là chẵn hay lẻ rồi áp dụng kết quả (như thế lời giải sẽ dài dòng).

8.2. Nếu $f(x)$ là hàm số chẵn thì $\int_{-a}^a \frac{f(x)}{a^x + 1} dx = \frac{1}{2} \int_{-a}^a f(x) dx$.

Chứng minh ở đây là: Đặt $t = -x$. Khi đó:

$$\begin{aligned} \int_{-a}^a \frac{f(x)}{a^x + 1} dx &= \int_{-a}^a \frac{f(t)}{a^{-t} + 1} dt = \int_{-a}^a \frac{a^t f(t)}{a^t + 1} dt = \int_{-a}^a \left(1 - \frac{1}{a^t + 1}\right) f(t) dt = \\ &= \int_{-a}^a f(x) dx - \int_{-a}^a \frac{f(x)}{a^x + 1} dx \Rightarrow \int_{-a}^a \frac{f(x)}{a^x + 1} dx = \frac{1}{2} \int_{-a}^a f(x) dx \end{aligned}$$

Ví dụ: Tính $I = \int_{-1}^1 \frac{x^4}{2^x + 1} dx$, (HVCNBCVT - A1999)

$$\begin{aligned} \text{Đặt } x = -t. \text{ Ta có: } \int_{-1}^1 \frac{x^4}{2^x + 1} dx &= \int_{-1}^1 \frac{t^4}{2^{-t} + 1} dt = \int_{-1}^1 \frac{2^t t^4}{2^t + 1} dt = \int_{-1}^1 \left(1 - \frac{1}{2^t + 1}\right) t^4 dt = \\ &= \int_{-1}^1 f(t) dt - \int_{-1}^1 \frac{t^4}{2^t + 1} dt \Rightarrow \int_{-1}^1 \frac{x^4}{2^x + 1} dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 x^4 dx = \frac{1}{10} x^5 \Big|_{-1}^1 = \frac{1}{5}. \end{aligned}$$

• Ở đây ta cũng có một chú ý tương tự chú ý ở **6.1**.

9. Áp dụng trực tiếp một tích phân lượng giác.

$$I = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{dx}{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x}, \quad (a^2 + b^2 > 0)$$

i) $a = 0$: Tích phân cơ bản.

ii) $b = 0$: Tích phân cơ bản.

$$3i) ab \neq 0: I = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{dx}{b^2 \cos^2 x \left(\frac{a^2}{b^2} \operatorname{tg}^2 x + 1 \right)}.$$

$$\text{Đặt } t = \frac{a}{b} \operatorname{tg} x, \text{ suy ra } I = \frac{1}{ab} \int_{\alpha_1}^{\beta_1} \frac{dt}{t^2 + 1}$$

Ví dụ: Tính $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{2 - \cos^2 x}$, (ĐHY Thái Bình - 2000)

$$\text{Ta có: } I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{2 \sin^2 x + \cos^2 x} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x (2 \operatorname{tg}^2 x + 1)}$$

$$\text{Đặt } t = \sqrt{2} \operatorname{tg} x \Rightarrow I = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{\sqrt{2}} \frac{dt}{t^2 + 1}$$

10. Nắm vững cách tính tích phân các hàm số phân thức hữu tỉ.

$$10.1. I = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{dx}{(ax + b)^n}; n \in \mathbb{N}.$$

$$10.2. I = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{dx}{(cx + d)^m(ax + b)^n}; m, n \in \mathbb{N}.$$

$$10.3. I = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{dx}{ax^2 + bx + c}$$

với ba trường hợp $\Delta = b^2 - 4ac < 0$, $\Delta = b^2 - 4ac = 0$, $\Delta = b^2 - 4ac > 0$.

$$10.4. I = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{dx}{(ax^2 + bx + c)^k(mx^2 + nx + p)^l}; k, l \in \mathbb{N}.$$

$$10.5. I = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{dx}{(ax + b)^k(mx^2 + nx + p)^l}; k, l \in \mathbb{N}.$$

$$10.6. I = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{P(x)dx}{Q(x)}; P(x) \text{ và } Q(x) \text{ là các đa thức.}$$

11. Nắm vững cách tính nguyên hàm của một số hàm lượng giác thường gặp.

$$11.1. I = \int \sin^2 x dx;$$

$$11.2. I = \int \sin^3 x dx = \int \sin^2 x \sin x dx = -\int (1 - \cos^2 x) d(\cos x);$$

$$11.3. I = \int \sin^4 x dx = \int \frac{(1 - \cos 2x)^2}{4} dx = \frac{1}{4} \int (1 - 2\cos 2x + \frac{1 + \cos 4x}{2}) dx;$$

$$11.4. I = \int \sin^5 x dx = -\int \sin^4 x d(\cos x) = -\int (1 - \cos^2 x)^2 d(\cos x)$$

$$11.5. I = \int \frac{dx}{\sin x};$$

$$11.6. I = \int \frac{dx}{\sin^3 x} = \int \frac{\sin x dx}{\sin^4 x} = \int \frac{\sin x dx}{(1 - \cos^2 x)^2};$$

$$11.7. I = \int \frac{dx}{\sin^4 x} = -\int (1 + \cot^2 x) d(\cot x);$$

$$11.8. I = \int \frac{dx}{\sin^5 x} = \int \frac{\sin x dx}{\sin^6 x} = \int \frac{\sin x dx}{(1 - \cos^2 x)^3};$$

$$11.9. I = \int \tan x dx;$$

$$11.10. I = \int \tan^2 x dx = \int (1 + \tan^2 x - 1) dx = \int d(\tan x) = \int dx;$$

$$11.11. I = \int (1 + \tan^2 x - 1) \tan x dx = \int \tan x d(\tan x) - \int \tan x dx$$

$$11.12. I = \int \tan^4 x dx = \int (1 + \tan^2 x - 1) \tan^2 x dx = \int \tan^2 x d(\tan x) - \int \tan^2 x dx$$

$$11.13. I = \int \tan^5 x dx = \int (1 + \tan^2 x - 1) \tan^3 x dx = \int \tan^3 x d(\tan x) - \int \tan^3 x dx$$

* **Chú ý** : Các kết quả tương tự $\sin x$ cho **cosx** và $\tan x$ cho **cotx**.
 Đối với các tích phân hàm số lượng giác cần chú ý biến đổi lượng giác.

Ví dụ 1: Tính $I = \int \frac{1}{1 + \cos x} dx = \int \frac{1}{2 \cos^2 \frac{x}{2}} dx = \int d\left(\tan \frac{x}{2}\right)$

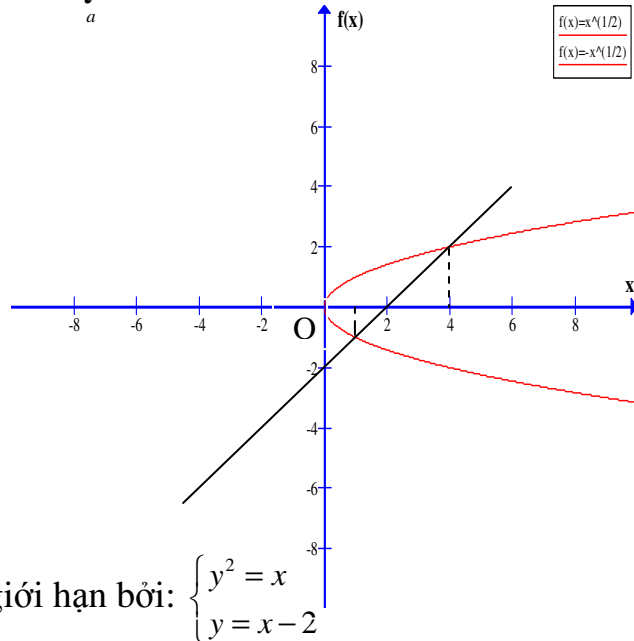
Ví dụ 2: Tính $I = \int \frac{1}{1 + \sin x} dx = \int \frac{1}{\left(\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2}\right)^2} dx = \int \frac{dx}{2 \sin^2 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)}$

11. Nắm vững cách tính diện tích hình phẳng và cách tính thể tích vật thể tròn xoay.

11.1. Tính diện tích hình phẳng.

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi:

$$\begin{cases} y = f(x) \\ y = g(x) \\ x = a \\ x = b > a \end{cases} \text{ là } S = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$$



VD. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi: $\begin{cases} y^2 = x \\ y = x - 2 \end{cases}$

$$\text{HD. Toạ độ giao điểm } \begin{cases} y^2 = x \\ y = x - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x - 2 \\ x^2 - 4x + 4 = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x - 2 \\ x^2 - 5x + 4 = 0 \end{cases}$$

Toạ độ hai giao điểm (1; -1) và (4; 2).

Suy ra diện tích hình phẳng:

$$\begin{aligned} \text{Cách 1: } S &= 2 \int_0^1 \sqrt{x} dx + \int_1^4 (\sqrt{x} - x + 2) dx = \frac{4}{3} x\sqrt{x} \Big|_0^1 + \left(\frac{2}{3} x\sqrt{x} - \frac{x^2}{2} + 2x \right) \Big|_1^4 \\ &= \frac{4}{3} + \frac{16}{3} - 8 + 8 - \frac{2}{3} + \frac{1}{2} - 2 = \frac{9}{2} \end{aligned}$$

$$\text{Cách 2: } S = \int_{-1}^2 (y + 2 - y^2) dy = \left(\frac{y^2}{2} + 2y - \frac{y^3}{3} \right) \Big|_{-1}^2 = \frac{9}{2}$$

11.2. Tính thể tích vật thể tròn xoay.

i) Vật thể tròn xoay được tạo nên khi quay hình phẳng giới hạn bởi:

$$\begin{cases} y = f(x) \\ y = 0 \\ x = a \\ x = b > a \end{cases} \text{ xung quanh trục hoành là } V = \pi \int_a^b f^2(x) dx$$

ii) Vật thể tròn xoay được tạo nên khi quay hình phẳng giới hạn bởi:

$$\begin{cases} x = g(y) \\ x = 0 \\ y = a \\ y = b > a \end{cases} \text{ xung quanh trục hoành là } V = \pi \int_a^b g^2(y) dy$$

3i) Vật thể bất kỳ có diện tích thiết diện thẳng vuông góc Ox là $S(x)$ và bị giới hạn bởi các mặt phẳng $x = a$, $x = b$ ($a < b$):

$$V = \int_a^b S(x) dx$$

VD. Cho một hình trụ có bán kính đáy R và chiều cao h . Cắt hình trụ bằng một mặt phẳng nghiêng với đáy một góc 45° và đi qua đường kính AB . Tính thể tích của các phần hình trụ bị cắt ra từ hình trụ.

HD. Gọi V là thể tích phần hình trụ $ABNFMCH$.

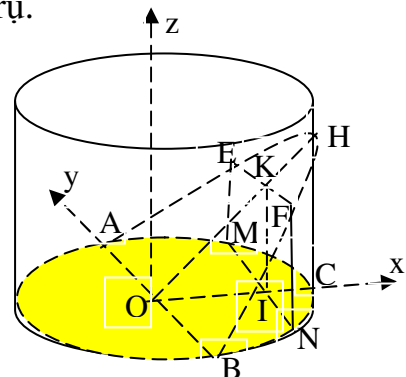
$$\text{Đặt } OI = x (x > 0) \Rightarrow MN = 2MI = 2\sqrt{R^2 - x^2}.$$

$$IK = IO = x.$$

Thiết diện là hình chữ nhật $MNFE$;

Ta có diện tích thiết diện là:

$$S(x) = 2x\sqrt{R^2 - x^2}$$



$$\text{Suy ra: } V = \int_0^R 2x\sqrt{R^2 - x^2} dx = -\int_0^R \sqrt{R^2 - x^2} d(R^2 - x^2) = -\frac{2}{3}(R^2 - x^2)\sqrt{R^2 - x^2} \Big|_0^R = \frac{2}{3}R^3$$

12. Bất đẳng thức tích phân.

Phương pháp Chung:

- Sử dụng tính chất của tích phân:

$$\text{Nếu } f(x) \leq g(x), \forall x \in [a; b] \text{ thì } \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx \quad (1)$$

- Để chứng minh $m \leq \int_a^b f(x) dx \leq M$ ta đánh giá $f(x)$ bằng cách:
 - Khảo sát sự đồng biến, nghịch biến của hàm $f(x)$ trên đoạn $[a; b]$.
 - Sử dụng bất đẳng thức.

$$\text{VD1. Chứng minh: } \frac{1}{41} \leq \int_{10}^{20} \frac{x^2 dx}{x^4 + x + 1} \leq \frac{1}{100}$$

$$\text{HD. Đặt } f(x) = \frac{x^2}{x^4 + x + 1}, x \in [10; 20]$$

$$f'(x) = \frac{2x(x^4 + x + 1) - x^2(4x^3 + 1)}{(x^4 + x + 1)^2} = \frac{-2x^5 + x^2 + 2x}{(x^4 + x + 1)^2} = x \cdot \frac{(2 - x^4) + (x - x^4)}{(x^4 + x + 1)^2} < 0, x \in [10; 20]$$

$$\text{Suy ra } \frac{400}{160000 + 20 + 1} = f(20) \leq \frac{x^2}{x^4 + x + 1} \leq f(10) = \frac{100}{10000 + 10 + 1}, x \in [10; 20]$$

$$\text{Nhưng } \frac{1}{410} < \frac{400}{164000} < \frac{400}{160000 + 20 + 1}, \frac{100}{10000 + 10 + 1} < \frac{100}{10000} = \frac{1}{100}$$

$$\text{Như thế } \frac{1}{410} < f(x) < \frac{1}{100} \Rightarrow \frac{1}{410} \int_{10}^{20} dx \geq \int_{10}^{20} f(x) dx \leq \frac{1}{100} \int_{10}^{20} dx \Rightarrow \text{dpcm}$$

$$\text{VD2. Chứng minh } 0 \leq \int_0^1 \frac{x^{19} dx}{\sqrt[3]{1+x^6}} \leq \frac{1}{20}$$

$$\text{HD. Ta có } 0 \leq \frac{x^{19}}{\sqrt[3]{1+x^6}} \leq x^{19}, \forall x \in [0; 1]$$

$$\text{VD3. Chứng minh } 0 \leq \int_0^{2000} \frac{e^{-5x} dx}{20+x} \leq \frac{1}{100}$$

$$\text{HD. Ta có } 0 \leq \frac{e^{-5x} dx}{20+x} \leq \frac{e^{-5x}}{20}, \forall x \in [0; 2000]$$

$$\text{VD4. Chứng minh } 1 - \frac{1}{n} \leq \int_0^1 e^{-x^n} dx \leq 1$$

$$\text{HD. Ta có } x \in [0; 1] \Rightarrow 0 \leq x^n \leq x^{n-1} \leq 1 \Rightarrow -x^{n-1} \leq -x^n \leq 0 \Rightarrow e^{-x^{n-1}} \leq e^{-x^n} \leq e^0 = 1$$

$$\text{Nhưng } 1+x \leq e^x, \forall x > 0 \text{ nên: } 1 - x^{n-1} \leq e^{-x^{n-1}} \leq e^{-x^n} \leq e^0 = 1, \forall x \in [0; 1]$$

VD5. Tính $\lim_{x \rightarrow 0} \int_0^1 x^n \sin \pi x dx$

HD. Ta có $0 \leq x^n \sin \pi x \leq x^n$

VD6. Chứng minh $\frac{\pi}{6} \leq \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2-x^3}} \leq \frac{\pi\sqrt{2}}{8}$

HD. Ta có

$$\begin{aligned} x \in [0;1] &\Rightarrow 0 \leq x^3 \leq x^2 \leq 1 \Rightarrow -x^2 \leq -x^3 \leq 0 \Rightarrow 0 < 4-2x^2 \leq 4-x^2-x^3 \leq 4-x^2 \\ &\Rightarrow \sqrt{4-2x^2} \leq \sqrt{4-x^2-x^3} \leq \sqrt{4-x^2} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} \leq \frac{1}{\sqrt{4-x^2-x^3}} \leq \frac{1}{\sqrt{4-2x^2}} \end{aligned}$$

VD7. Chứng minh $\frac{\sqrt{3}}{4} \leq \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x dx}{x} \leq \frac{1}{2}$

HD. Đặt $f(x) = \frac{\sin x}{x}, x \in \left[\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{3}\right] \Rightarrow f'(x) = \frac{x \cos x - \sin x}{x^2}, x \in \left[\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{3}\right]$

Đặt $g(x) = x \cos x - \sin x, x \in \left[\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{3}\right] \Rightarrow g'(x) = -x \sin x < 0, \forall x \in \left[\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{3}\right]$

Suy ra $g(x) \leq g\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{6} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} < 0 \Rightarrow f'(x) < 0, \forall x \in \left[\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{3}\right] \Rightarrow f(x)$ nghịch biến

$$\Rightarrow f\left(\frac{\pi}{3}\right) \leq \frac{\sin x}{x} \leq f\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

VD8. Chứng minh $2,5 < \int_2^3 \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2-1}} < \frac{9\sqrt{2}}{4}$

HD. Đặt $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}, x \in [0;1] \Rightarrow f'(x) > 0, \forall x \in [0;1] \Rightarrow f(x)$ đồng biến

$$\text{Suy ra } \frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}} = f(x) < f(3) = \frac{9\sqrt{2}}{4}$$

Mặt khác $\frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}} = x \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} > x$

BÀI TẬP LUYỆN TẬP.

Bài 1. Tính $I = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\tan^4 x dx}{\cos 2x}$ (ĐH - A2008)

Bài 2. Tính $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) dx}{\sin 2x + 2(1 + \sin x + \cos x)}$ (ĐH - B2008)

Bài 3. Tính $I = \int_0^2 \frac{\ln x dx}{x^3}$ (ĐH - D2008)

Bài 4. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường:

$$y = (e + 1)x, y = (1 + e^x)x. \quad (\text{ĐH - A2007})$$

Bài 5. Cho hình phẳng giới hạn bởi các đường:

$$y = x \ln x, y = 0, x = e.$$

Tính thể tích của khối tròn xoay khi quay (H) xung quanh trục Ox.

(ĐH - B2007)

Bài 6. Tính tích phân : $I = \int_1^e x^3 \ln x dx$ (ĐH - D2007)

Bài 7. Tính tích phân : $I = \int_0^4 \frac{\sqrt{2x+1}}{1+\sqrt{2x+1}} dx$ (ĐH - TK1- A2007)

Bài 8. Trong mpOxy cho hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $4y = x^2$; $y = x$. Tính thể tích của khối tròn xoay khi quay (H) xung quanh trục Ox một vòng. (ĐH - TK2- A2007)

Bài 9. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường: $y = x^2$; $y = \sqrt{1-x^2}$ (ĐH - TK1- B2007)

Bài 10. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường: $y = 0$; $y = \frac{x(1-x)}{x^2+1}$ (ĐH - TK2- B2007)

Bài 11. Tính: $\int_0^1 \frac{x(x-1)}{x^2-4} dx$ (ĐH - TK1- D2007)

Bài 12. Tính tích phân: $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{\sqrt{\cos^2 x + 4\sin^2 x}} dx$ (ĐH - A2006)

Bài 13. Tính tích phân: $I = \int_{\ln 3}^{\ln 5} \frac{dx}{e^x + 2e^{-x} - 3}$ (ĐH - B2006)

Bài 14. Tính tích phân: $I = \int_0^1 (x - 2)e^{2x} dx$ (ĐH - D2006)

Bài 15. Tính tích phân: $I = \int_2^6 \frac{dx}{2x + 1 + \sqrt{4x + 1}}$ (ĐH - TK1- A2006)

Bài 16. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi parabol $y = x^2 - x + 3$ và đường thẳng $d : y = 2x + 1$. (ĐH - TK2- A2006)

Bài 17. Tính tích phân: $I = \int_5^{10} \frac{dx}{x - 2\sqrt{x - 1}}$ (ĐH - TK1- B2006)

Bài 18. Tính tích phân: $I = \int_1^{\sqrt{e}} \frac{3 - 2\ln x}{x\sqrt{1 + 2\ln x}} dx$ (ĐH - TK2- B2006)

Bài 19. Tính tích phân: $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x + 1)\sin 2x dx$ (ĐH - TK1- D2006)

Bài 20. Tính tích phân: $I = \int_1^2 (x - 2)\ln x dx$ (ĐH - TK2- D2006)

Bài 21. Tính tích phân: $I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^2 x \cdot \operatorname{tg} x dx$. (ĐH - TK1- A2005)

Bài 22. Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x + \sin x}{\sqrt{1 + 3\cos x}} dx$. (ĐH - A2005)

Bài 23. Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x \cos x}{1 + \cos x} dx$. (ĐH - B2005)

Bài 24. Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (e^{\sin x} + \cos x) dx$. (ĐH - D2005)

Bài 25. Tính tích phân $I = \int_0^7 \frac{x + 2}{\sqrt[3]{x + 1}} dx$. (ĐH - TK2- A2005)

Bài 26. Tính tích phân $\int_0^e x^2 \ln x dx$. (ĐH - TK1- B2005)

Bài 27. Tính tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{4}} (tgx + e^{\sin x} \cos x) dx$. (ĐH - TK2- B2005)

Bài 28. Tính tích phân $I = \int_1^{e^3} \frac{\ln^2 x}{x\sqrt{\ln x + 1}} dx$. (ĐH - TK1- D2005)

Bài 29. Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2x - 1) \cos^2 x dx$. (ĐH - TK2- D2005)

Bài 30. Tính tích phân $I = \int_1^2 \frac{x}{1 + \sqrt{x-1}} dx$. (ĐH - A2004)

Bài 31. Tính tích phân $I = \int_1^e \frac{\sqrt{1+3\ln x} \ln x}{x} dx$. (ĐH - B2004)

Bài 32. Tính tích phân $I = \int_2^3 \ln(x^2 - x) dx$. (ĐH - D2004)

Bài 33. Tính tích phân $I = \int_{\sqrt{5}}^{2\sqrt{5}} \frac{x}{1 + \sqrt{x-1}} dx$. (ĐH - A2003)

Bài 34. Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1 - 2\sin^2 x}{1 + \sin 2x} dx$. (ĐH - B2003)

Bài 35. Tính tích phân $I = \int_0^2 |x^2 - x| dx$. (ĐH - D2003)

Bài 36. Tính diện tích giới hạn bởi các đường $y = |x^2 - 4x + 3|$, $y = x + 3$. (ĐH - A2002)

Bài 37. Tính diện tích giới hạn bởi các đường $y = \sqrt{4 - \frac{x^2}{4}}$, $y = \frac{x^2}{4\sqrt{2}}$. (ĐH - B2002)

Bài 38. Tính tích phân $I = \int_{\sqrt{2}}^2 \frac{3x^2 + 3x + 3}{x^3 - 3x + 2} dx$.

Bài 39. Tính tích phân $I = \int_0^1 \frac{x^2 - 1}{x^4 + 1} dx$.

Bài 40. Tính tích phân $I = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{x^2(x^2 + 3)}$.

Bài 41. Tính tích phân $I = \int_1^2 \frac{2x \ln x}{(1 + x^2)^2} dx$.

Bài 42. Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x} \sin^2 x dx$.

Bài 43. Tính tích phân $I = \int_0^1 \frac{dx}{x^4 + 4x^2 + 3}$.

Bài 44. Tính tích phân $I = \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + \sin x} dx$.

Bài 45. Tính tích phân $\int_0^x \cos(t - x^2) dt = \sin x$.

Bài 46. Tính tích phân $I = \int_0^{e^\pi} \cos(\ln x) dx$.

Bài 47. Tính tích phân $I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2 + x + 1}}$.

Bài 48. Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{2 - \cos^2 x}$. (ĐH Y Thái Bình - 2000)

Bài 49. Tính tích phân $I = \int_0^1 \frac{xdx}{x^4 + x^2 + 1}$. (ĐHK TTC - 2000)

Bài 50. Tính tích phân $I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{\tan^2 x + \cot^2 x - 2} dx$. (ĐHMỏ ĐC - 2000)

Bài 51. Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^{10} x + \sin^{10} x - \cos^4 x \sin^4 x) dx$.
(ĐHSPHN2 - 2000)

Bài 52. Tính tích phân $I = \int_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{1+x^3}}$. (ĐHSPHN2 - 2000)

Bài 53. Tính tích phân $I = \int_0^1 \frac{3dx}{1+x^3}$. (ĐHLuật HN - 2000)

Bài 54. Tính tích phân $I = \int_0^1 \frac{dx}{e^{2x} + 3}$. (ĐHCông Đoàn - 2000)

Bài 55. Tính tích phân $I = \int_1^2 \frac{\ln(x+1)dx}{x^2}$. (ĐHCông Đoàn - 2000)

Bài 56. Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{4 \sin x dx}{(\sin x + \cos x)^3}$. (ĐH Thương Mại - 2000)

Bài 57. Tính tích phân $I = \int_0^4 \sqrt{x^3 - 2x^2 + x} dx$. (ĐH Thủy Lợi - 2000)

Bài 58. Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} x \tan^2 x dx$. (ĐH Nông Nghiệp I - 2000)

Bài 59. Tính tích phân $I = \int_1^e \frac{\ln x}{x(\ln^2 x + 1)} dx$. (ĐH Cần Thơ - 1999)

Bài 60. Tính tích phân $I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\sin 2x - 2 \sin x}$.

Bài 61. Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\sin^2 x} \sin x \cos^3 x dx$.

Bài 62. Tính tích phân

$$a) I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) dx \quad b) I = \int_0^1 \frac{x^4 + 1}{x^6 + 1} dx \quad c) I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\sin^4 x \cos x}$$

(HVKTMM - 1999)

Bài 63. Chứng minh $\int_{\frac{1}{e}}^{\tan a} \frac{x dx}{1+x^2} + \int_{\frac{1}{e}}^{\cot a} \frac{dx}{x(1+x^2)} = 1$ ($\tan a > 0$) (ĐH Luật - 1999)

Bài 64. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi:

$$y = \left| 1 - 2 \sin^2 \frac{x}{2} \right|, y = 1 + \frac{12x}{\pi}, x = \frac{\pi}{2} \quad (\text{HVBCVT} - 2000)$$

Bài 65. Chứng minh rằng với mọi m, n khác nhau, ta có:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos m x \cos n x dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin m x \sin n x dx = 0 \quad (\text{ĐH Luật} - 2000)$$

Bài 66. Cho $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$. Xác định a, b sao cho $\frac{1}{\cos x} = \frac{a \cos x}{1 - \sin x} + \frac{b \cos x}{1 + \sin x}$

Từ đó suy ra: $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos x}$

Bài 67. Cho $a > 0$, $f(x)$ là hàm số chẵn liên tục trên \mathbb{R} . Chứng minh rằng với mọi $x \in \mathbb{R}$, ta có:

$$\int_{-x}^x \frac{f(t) dt}{a^t + 1} = \int_0^x f(t) dt$$

Áp dụng tính $\int_{-x}^x \frac{\cos t dt}{e^t + 1}$

Bài 68. Tính tích phân $I = \int_{-3}^2 \frac{dx}{|x|+1}$.

Bài 69. Tính tích phân $I = \int_{-1}^3 |x-2| dx$.

Bài 70. Tính tích phân $I = \int_{-1}^1 (|2x-1|-|x|)^2 dx$.

Bài 71. Tính tích phân $I = \int_0^1 |x^2 - 2x + m| dx$.

Bài 72. Tính tích phân $I = \int_1^2 |x^2 - (a+1)x + a| dx$.

